Educación Secundaria para Personas Adultas

(E. S. P. A.)

MATEMÁTICAS

MÓDULO IV – NIVEL II

(4º E. S. P. A.)

C. E. A "MAR MENOR"

Curso 2009-2010

ÍNDICE

Unidad 1: Ecuaciones de segundo grado.

1. LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO.

Una **ecuación de segundo grado** es una igualdad algebraica en la que distinguimos dos características:

- Tiene una incógnita, siendo alguno de sus términos un monomio de segundo grado.
- No tiene términos de grado superior a dos.

La **expresión general** de la ecuación de segundo grado es: $ax^2 + bx + c = 0$ con a, b y números conocidos siendo $a \neq 0$.

ax^2 es el término cuadrático, es el término lineal y c es el término independiente.

$ax^2 + bx + c = 0$ es un polinomio de segundo grado igualado a cero.

Ejemplos:

Ecuación	Expresión general	Coeficientes
$3x^2 + 2x = 5$	$3x^2 + 2x - 5 = 0$	a = 3 ; b = 2; c = – 5
$2x^2 = 12$	$2x^2 - 12 = 0$	a = 2 ; b = 0 ; c = – 12
$(x-3)\cdot(x+2) = -9$	$x^2 - x + 3 = 0$	a = 1 ; b = – 1; c = 3
$5x^2 = -4x$	$5x^2 + 4x = 0$	a = 5 ; b = 4; c = 0
$7x^2 = 0$	$7x^2 = 0$	a = 7; b = 0; c = 0
$3x \cdot (x+2) = 0$	$3x^2 + 6x = 0$	a = 3; b = 6; c = 0

Encontrar la solución de una ecuación de segundo grado con una incógnita es hallar el valor numérico de la incógnita que verifica la igualdad. Por ejemplo, en la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$:

- el valor $x = 4$ no es solución porque $4^2 - 5\cdot 4 + 6 = 16 - 20 + 6 = 2 \neq 0$
- el valor $x = 2$ si es solución porque $2^2 - 5\cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$

La **ecuación de segundo grado**, $ax^2 + bx + c = 0$, se dice que está **completa** cuando todos los coeficientes son distintos de cero. En este caso las soluciones se obtienen aplicando la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \begin{cases} x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$$

Ejemplo: $x^2 - 3x + 2 = 0$ en esta ecuación $a = 1,\ b = -3,\ c = 2$ y aplicando la fórmula:

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \dfrac{3+1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 & \boxed{x = 2} \\ \dfrac{3-1}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 & \boxed{x = 1} \end{cases}$$

El valor del radicando de $\sqrt{b^2 - 4ac}$ permite saber el número de soluciones sin necesidad de hallarlas. $D = b^2 - 4ac$ se llama **discriminante**.

$D = b^2 - 4ac$
- si D es positivo, tiene dos soluciones (signo +, signo -)
- si D es cero, tiene una solución (solución doble)
- si D es negativo, no tiene soluciones

Por ejemplo:

- La ecuación $x^2 - 6x + 9 = 0$ tiene una única solución puesto que su discriminante es:

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$$

- La ecuación $3x^2 - 7x + 2 = 0$ tiene dos soluciones puesto que su discriminante es:

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 49 - 24 = 25 > 0$$

- La ecuación $x^2 + x + 1 = 0$ no tiene soluciones puesto que su discriminante es:

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3$$

2. CASOS PARTICULARES DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO.

Si en la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ alguno de los coeficientes b o c es nulo, se dice que es una **ecuación incompleta** y se pueden resolver directamente, sin necesidad de aplicar la fórmula anterior:

a) Si $b = c = 0$ entonces la ecuación queda $ax^2 = 0$ y la solución es $x = 0$.

b) Si $b = 0$ entonces la ecuación queda $ax^2 + c = 0$ y sus soluciones son $x = \pm\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$.

Si $\dfrac{-c}{a} < 0$, la ecuación no tiene solución. En caso contrario hay dos soluciones opuestas.

c) Si $c = 0$ entonces la ecuación queda $ax^2 + bx = 0$ y sus soluciones son x = 0 y x = $\dfrac{-b}{a}$.

Ejemplos:

a) $-2x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

b) $3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = \dfrac{12}{3} = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \Rightarrow x = \pm 2$

c) $3x^2 - 12x = 0$.

Se saca factor común x: $x \cdot (3x - 12) = 0$

primer factor cero $\Rightarrow x = 0$

segundo factor cero $\Rightarrow 3x - 12 = 0$

$$3x = 12$$

$$x = \frac{12}{3} = 4$$

$$x = 4$$

3. REGLAS PARA RESOLVER ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

- ✓ Si la ecuación de segundo grado está completa (tiene todos sus términos), se aplica la fórmula general de resolución.

- ✓ Si es una ecuación incompleta (falta el término lineal, el término independiente o ambos), se puede resolver directamente y con facilidad sin necesidad de aplicar la fórmula general de resolución.

- ✓ Si no aparece escrita en su forma general, deberemos "arreglarla" antes de proceder a su resolución: quitar paréntesis y denominadores, agrupar términos y pasarlos todos al primer miembro de la ecuación.

  Sólo cuando esté simplificada se puede aplicar alguno de los dos puntos anteriores.

- ✓ Comprobamos las soluciones. Y si la ecuación proviene de un problema con enunciado, hacemos la comprobación sobre el enunciado puesto que, con frecuencia, alguna de las soluciones obtenidas suele carecer de sentido real.

Por ejemplo:

- Resolvamos la ecuación: $\dfrac{x^2 - 3x}{2} - 5 = \dfrac{x - 20}{4}$.

  Reducimos a común denominador: $\dfrac{2 \cdot (x^2 - 3)}{4} - \dfrac{20}{4} = \dfrac{x - 20}{4}$

  Quitamos denominadores y paréntesis: $2x^2 - 6x - 20 = x - 20$

  Agrupamos todos los términos en el primer miembro de la igualdad: $2x^2 - 7x = 0$

Es una ecuación incompleta de segundo grado que podemos resolver sin utilizar la fórmula general de resolución. Sacamos factor común x:

$$x \cdot (2x-7) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ 2x - 7 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{7}{2} \end{cases}$$

Así pues, la ecuación tiene dos soluciones: $x = \dfrac{7}{2}$ y $x = 0$.

Comprobamos las soluciones:

$\boxed{x = \dfrac{7}{2}}$

Sustituimos en el primer miembro de la **ecuación inicial**:

$$\frac{3{,}5^2 - 3 \cdot 3{,}5}{2} - 5 = \frac{12{,}25 - 10{,}5}{2} - 5 = \frac{1{,}75}{2} - 5 = 0{,}875 - 5 = -4{,}125$$

Sustituimos en el segundo miembro de la ecuación de partida:

$$\frac{3{,}5 - 20}{4} = \frac{-16{,}5}{4} = -4{,}125$$

Los valores numéricos de las expresiones algebraicas en los dos miembros de la ecuación para $x = \dfrac{7}{2}$ coinciden, por lo que $x = \dfrac{7}{2}$ es una solución de la ecuación anterior.

$\boxed{x = 0}$

Sustituimos en el primer miembro de la **ecuación inicial**:

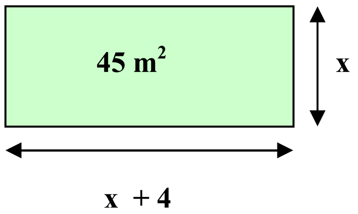
$$\frac{0^2 - 3 \cdot 0}{2} - 5 = \frac{0}{2} - 5 = -5 =$$

Sustituimos en el segundo miembro de la ecuación de partida:

$$\frac{0 - 20}{4} = \frac{-20}{4} = -5$$

Los valores numéricos de las expresiones algebraicas en los dos miembros de la ecuación para $x = 0$ coinciden, por lo que $x = 0$ es una solución de la ecuación anterior.

- Calcula las dimensiones de una parcela rectangular, sabiendo que es 4 metros más ancha que alta y que tiene una superficie de 45 m^2.



Llamamos x a la longitud de la altura de la parcela.

Como la parcela es rectangular, su superficie se calculará multiplicando las dimensiones que tiene de ancha y alta:

$45 = x \cdot (x + 4) \Rightarrow 45 = x^2 + 4x \Rightarrow x^2 + 4x - 45 = 0.$

Aplicamos la fórmula general de resolución:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot (-45)}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+180}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{196}}{2} = \frac{-4 \pm 14}{2} = \begin{cases} \dfrac{-4+14}{2} = \dfrac{10}{2} = 5 \\ \dfrac{-4-14}{2} = \dfrac{-18}{2} = -9 \end{cases}$$

De las dos soluciones de la ecuación desechamos la segunda, $x = -9$ por ser incompatible con el enunciado del problema (el lado de un rectángulo no puede medir una cantidad negativa). Nos queda, por lo tanto, una única solución: $x = 5$.

Luego, las dimensiones del rectángulo son:

ALTO $\rightarrow$ $x = 5$ m.

ANCHO $\rightarrow$ $x + 4 = 5 + 4 = 9$ m.

ACTIVIDADES.

1. Escribe cada una de las siguientes ecuaciones en forma general identificando los coeficientes *a, b* y *c:*

a) $-2x^2 + 3x - 5 = 0$	b) $3x^2 = 4x - 1$	c) $1 - 3x^2 + x = 0$
d) $2 = 3x - 4x^2$	e) $2x \cdot (x - 1) = 2$	f) $(x-2) \cdot x = 3x \cdot (2x+1)$
g) $2x - 3 = 4x^2 - 5x + 1$	h) $(2 - 3x)^2 = x + 1$	i) $(x-2) \cdot (3-2x) = 3$

2. Decir en cada ecuación si los valores que se proponen son solución o no de la ecuación.

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$; $x = 0, x = 2, x = -3, x = 5$

b) $2x^2 - 5x + 2 = 0$; $x = 1, x = \frac{1}{2}, x = -2, x = 3$

c) $2x^2 - 3x - 5 = 0$; $x = -1, x = 1, x = 2, x = -2$

3. En la ecuación $x^2 - 5x + c = 0$, una solución es 3. ¿Cuánto vale *c*?

4. En la ecuación $x^2 + bx + 15 = 0$, una solución es 5 ¿Cuánto vale *b?*

5. Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas sin utilizar la fórmula general de resolución.

a) $x^2 - x = 0$ b) $2x^2 = 0$ c) $x^2 - 9 = 0$ d) $4x^2 - 9 = 0$
e) $x^2 + 2x = 0$ f) $8x^2 + 16x = 0$ g) $3x^2 - 4 = 28 + x^2$ h) $x^2 - 9x = 0$
i) $x^2 - 1 = 0$ j) $x^2 - 6 = 10$ k) $1 - 4x^2 = -8$ l) $x^2 + 11x = 0$
m) $(x+1)\cdot(x-5)+5=0$ n) $(3x-2)\cdot(3x+2)=77$

6. Calculando el discriminante, indicar el número de soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 7x + 3 = 0$ b) $x^2 - 16x + 64 = 0$ c) $x^2 - 6x + 13 = 0$
d) $x^2 - 14x + 49 = 0$ e) $3x^2 - 5x + 2 = 0$ f) $2x^2 - x - 45 = 0$
g) $x^2 + x + 2 = 0$ h) $4x^2 - 12x + 9 = 0$ i) $x^2 - 8x + 25 = 0$
j) $x - 2x^2 + 7 = 0$ k) $x - 5 + 3x^2 = 0$ l) $8 + x^2 + 3x = 0$

7. Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 8x + 15 = 0$ b) $2x^2 - 9x - 1 = 0$ c) $4x^2 - 12x + 9 = 0$
d) $x^2 - 8x + 25 = 0$ e) $4x^2 + 12x + 9 = 0$ f) $3x^2 - 2x - 1 = 0$
g) $x^2 + 7x + 3 = 0$ h) $3x^2 - 6x - 12 = 0$ i) $3x^2 - 10x + 3 = 0$
j) $2x^2 - 5x + 2 = 0$ k) $6x^2 - 5x + 1 = 0$ l) $6x^2 - 7x + 2 = 0$

8. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $11x + 21 = 2x^2$ b) $3\cdot(x-1)\cdot(x+2)=3x-6$ c) $21x - 100 = x^2 + 21 - x$
d) $2x^2 - 1 = 1 - x - x^2$ e) $(x-2)^2 = 3$ f) $(5x-3)^2 - 11\cdot(4x+1)=1$
g) $(4x-1)\cdot(2x+2)=12$ h) $x^2 - \frac{x}{2} = \frac{1}{3} - \frac{2x}{3}$ i) $x^2 - \frac{3x+1}{2} = \frac{2}{3}$

9. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(2x+3)\cdot(2x-3)=91$ *b*) $3x^2 + 7x = 0$ *c*) $2x^2 + 5x - 3 = 0$
d) $x^2 - 17 = 130 - 2x^2$ *e*) $2x\cdot(x-1) = x^2 - x + 30$
f) $x^2 - \frac{7x}{6} + \frac{1}{3} = 0$ *g*) $(x-4)^2 = 16$
h) $(2x-5)\cdot(4x+3)+7x = 3\cdot(4x^2 - 3x - 7)$

10. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$a)\ x^2 + 2x + 1 = 0$

$b)\ x^2 - 9x = 8 - 2\cdot(3x+4)$

$c)\ 4x - 5\cdot\left(x^2 - 1\right) = x\cdot(2-x) + 5$

$d)\ \dfrac{x^2 - 2x}{2} = \dfrac{2x^2 - 5x}{3}$

$e)\ x^2 = \dfrac{5x}{4}$

$f)\ 7x^2 - 2x = x^2 - 5x$

$g)\ x^2 + 4x + 4 = -1$

$h)\ \dfrac{x}{2}\cdot(x-1) - \dfrac{x}{5}\cdot(2x+1) = \dfrac{4}{5}$

11. Dentro de 11 años la edad de Pedro será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. Calcula la edad de Pedro.

12. Para vallar una finca rectangular de 750 m² se han utilizado 110 m de cerca. Calcula las dimensiones de la finca.

13. Los tres lados de un triángulo rectángulo son proporcionales a los números 3, 4 y 5. Halla la longitud de cada lado sabiendo que el área del triángulo es 24 m².

14. Un jardín rectangular de 50 m de largo por 34 m de ancho está rodeado por un camino de arena uniforme. Halla la anchura de dicho camino si se sabe que su área es 540 m².

15. Halla un número entero sabiendo que la suma con su inverso es $\dfrac{26}{5}$.

16. Dos números naturales se diferencian en dos unidades y la suma de sus cuadrados es 580. ¿Cuáles son esos números?

17. Una pieza rectangular es 4 cm más larga que ancha. Con ella se construye una caja de 840 cm3 cortando un cuadrado de 6 cm de lado en cada esquina y doblando los bordes. Halla las dimensiones de la caja.

18. Halla la edad de una persona sabiendo que si al cuadrado se le resta el triple de la edad resulta nueve veces ésta.

19. Si a los dos términos de $\dfrac{2}{3}$ se les suma cierto número, y a la fracción obtenida se le resta el mismo número sumado a los términos de la fracción anterior, resulta $\dfrac{2}{3}$. ¿De qué número se trata?

20. Halla dos números consecutivos cuyo producto es 56.

21. La edad de un padre es el cuadrado de la de su hijo. Dentro de 24 años la edad del padre será el doble de la del hijo. ¿Cuántos años tiene ahora cada uno?

22. El dividendo de una división es 1081; el cociente y el resto son iguales y el divisor el doble del cociente. Halla el divisor.

23. Calcula el número de canicas que tiene Carlos si la suma de su cuadrado más su triple es igual a ese número multiplicado por diez.

24. María tiene 72 € y esta cantidad coincide con el resultado de multiplicar los euros que tienen Luis y Óscar. Sabiendo que Luis tiene un euro más que Óscar, ¿cuántos euros tiene cada uno?

25. En una sala el número de filas es igual al doble del número de sillas de una fila. Si hay 1352 sillas y cada fila tiene el mismo número de sillas, ¿cuántas filas hay en la sala?

26. Un terreno rectangular tiene 84 m^2 de superficie. La base, mide 5 m más que la altura. Calcula sus dimensiones.

27. Si a un número aumentado en tres unidades se le multiplica por ese mismo número disminuido en tres unidades, se obtiene 216. ¿Cuál es ese número?

28. La suma del dinero que tienen dos amigos es de 55 euros y el producto es 750 euros. ¿Qué cantidad tiene cada uno?

29. Si aumentamos en tres metros el lado de un cuadrado, su área aumenta en 51 m^2. ¿Cuál es el lado del cuadrado?

30. Calcula el número natural que es 90 unidades menor que su cuadrado.

31. Juan dice que si añade 3 años a su edad y lo eleva al cuadrado, el resultado es 225. ¿Cuántos años tiene Juan?

32. El perímetro de un rectángulo es de 54 metros y su superficie es de 180 m^2. ¿Cuáles son sus dimensiones?

33. La suma del dinero que tienen dos amigos es de 39 € y el producto es 360 euros. ¿Qué cantidad tiene cada uno?

34. Si disminuimos el lado de un cuadrado en 4 metros, su área queda disminuida en 64 m^2. ¿Cuánto mide el lado?

35. El precio de una camiseta es $\frac{3}{4}$ del precio de una camisa y el producto de los precios de ambas prendas es de 972 €. ¿Cuál es el precio de cada una?

36. En el bolsillo llevo cierto número de billetes y monedas. Si llevo dos monedas menos que billetes y el producto de ambas cantidades es 15, ¿cuántas monedas y billetes llevo?

37. El largo de una sala rectangular es 3 metros mayor que el ancho. Si el ancho aumenta 3 m y el largo aumenta 2 m, el área se duplica. Halle el área original de la sala.

38. La base de un rectángulo mide 5 cm más que la altura. Si disminuimos la altura en 2 cm, el área del nuevo rectángulo será 60 cm^2. Halla los lados del rectángulo.

Unidad 2: Sistemas de ecuaciones lineales.

1. ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS.

Recordemos que una ecuación de primer grado con una incógnita es una igualdad algebraica que tiene una sola incógnita con exponente uno.

Vamos a estudiar ahora ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, a las que denominaremos **ecuaciones lineales**. Por ejemplo, $2x + y = 50$.

Una **solución de una ecuación lineal** es un par de valores que hacen cierta la igualdad. Por ejemplo, $x = 20$, $y = 10$, hacen cierta la igualdad anterior ($2x + y = 50$):

$$2 \cdot 20 + 10 = 40 + 10 = 50$$

Sin embargo, la solución no es única. Observa que hay otros pares de valores que hacen cierta la igualdad:

$$\left.\begin{array}{l} x = 5 \\ y = 40 \end{array}\right\} \rightarrow 2 \cdot 5 + 40 = 10 + 40 = 50 \qquad \left.\begin{array}{l} x = 10 \\ y = 30 \end{array}\right\} \rightarrow 2 \cdot 10 + 30 = 20 + 30 = 50$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 15 \\ y = 20 \end{array}\right\} \rightarrow 2 \cdot 15 + 20 = 30 + 20 = 50$$

En realidad, la ecuación tiene infinitas ecuaciones. Para determinar con exactitud los valores de las incógnitas x e y necesitaríamos más datos.

La **expresión general de una ecuación lineal** es: $ax + by = c$, con:

a, b → Coeficientes de las incógnitas (son valores conocidos).

c → Término independiente (es un valor conocido).

x, y → Incógnitas de la ecuación lineal (son valores desconocidos).

En nuestro ejemplo anterior ($2x + y = 50$) :

$$a = 2$$

$$b = 1$$

$$c = 50.$$

2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Dos ecuaciones lineales forman un sistema de ecuaciones lineales.

Un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas** es un conjunto de dos ecuaciones que se puede representar de la forma: $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

a, a´, b y b´ son los **coeficientes de las incógnitas**.

c y c´son los **términos independientes.**

Por ejemplo: $\begin{cases} x+y=5 \\ x-2y=2 \end{cases}$ es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Incógnitas: *x*, y
Coeficientes de las incógnitas: a = 1; b = 1; a' = 1 ; b'= – 2
Términos independientes: c = 5 ; c'= 2

Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es encontrar dos números (un valor para *x* y otro para y) que al reemplazarlos en las **<u>dos</u>** ecuaciones satisfacen ambas simultáneamente.

Una **solución** de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es un par de números que verifica las dos ecuaciones.

Si un sistema tiene solución, es decir, si se pueden encontrar dos números que cumplan las dos ecuaciones, se dice que es **compatible**. Si no tiene solución diremos entonces que se trata de un sistema **incompatible.**

Dos sistemas son **equivalentes** si tienen la misma solución.

Por ejemplo, vamos a comprobar si el sistema $\begin{cases} x+y=5 \\ x-2y=2 \end{cases}$ de ecuaciones tiene como solución el par *x* = 4, y = 1:

- Sustituimos x por 4 e y por 1 en cada una de las ecuaciones.
  $x + y = 5 \rightarrow 4 + 1 = 5 \longrightarrow$ Cumple la ecuación.
  $x - 2y = 2 \rightarrow 4 - 2 \cdot 1 = 2 \longrightarrow$ Cumple la ecuación.
- Por tanto, el par *x* = 4, y = 1 es una solución del sistema.
- El sistema es compatible.

El sistema $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-4y=4 \end{cases}$ también tiene como solución *x* = 4, y = 1, por lo tanto, es equivalente al anterior.

3. MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas podemos utilizar cualquiera de los tres métodos de resolución siguientes: **Método de sustitución, método de igualación o método de reducción.**

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN:

Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por el método de sustitución tendremos que:

a) **Despejar** una de las incógnitas de una de las dos ecuaciones.
b) **Sustituir** la expresión obtenida en la otra ecuación.
c) **Resolver** la ecuación con una incógnita que resulta.
d) **Sustituir** el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener el valor de la otra incógnita.
e) **Comprobar** que la solución obtenida verifica ambas ecuaciones.

Por ejemplo, vamos a resolver el sistema $\begin{cases} x+y=30 \\ x-y=10 \end{cases}$ por el método de sustitución.

a) Elegimos para despejar la incógnita x de la segunda ecuación: $x = 10 + y$

b) Sustituimos esta incógnita en la primera ecuación:

$$\underline{x} + y = 30 \Rightarrow \underline{(10 + y)} + y = 30$$

c) Resolvemos la ecuación obtenida:

$(10 + y) + y = 30$
$10 + y + y = 30$
$10 + 2y = 30$
$2y = 30 - 10$
$y = \dfrac{20}{2} \Rightarrow \boxed{y = 10}$

d) Sustituimos el valor y = 10 por ejemplo, en la primera ecuación:

$x + y = 30 \Rightarrow x + 10 = 30 \Rightarrow \boxed{x = 20}$

e) Comprobamos la solución obtenida, para ello hay que sustituir los valores x = 20 e y = 10 en las dos ecuaciones:

$x + y = 30 \rightarrow 20+ 10 = 30 \quad \Rightarrow$ Cumple la ecuación.
$x - y = 10 \rightarrow 20 - 10 = 10 \quad \Rightarrow$ Cumple la ecuación.

Por tanto, se trata de un sistema compatible.

MÉTODO DE IGUALACIÓN:

Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por el método de igualación tendremos que:

a) **Despejar** la misma incógnita de las dos ecuaciones.
b) **Igualar** las expresiones obtenidas.
c) **Resolver** la ecuación con una incógnita que resulta.
d) **Sustituir** el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener el valor de la otra incógnita.
e) **Comprobar** que la solución obtenida verifica ambas ecuaciones.

Por ejemplo, vamos a resolver el sistema $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 3x + y = 11 \end{cases}$ por el método de igualación.

a) Elegimos para despejar la incógnita y de las dos ecuaciones: $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 11 - 3x \end{cases}$

b) Igualamos las expresiones obtenidas: $2x + 1 = 11 - 3x$

c) Resolvemos la ecuación obtenida:

$2x + 1 = 11 - 3x$
$2x + 3x = 11 - 1$
$5x = 10$
$\boxed{x = 2}$

d) Sustituimos el valor $x = 2$ por ejemplo, en la segunda ecuación:

$3x + y = 11$
$3 \cdot 2 + y = 11$
$6 + y = 11$
$\boxed{y = 5}$

e) Comprobamos la solución obtenida, para ello hay que sustituir los valores $x = 2$ e $y = 5$ en las dos ecuaciones:

$2x - y = -1 \rightarrow 2 \cdot 2 - 5 = 4 - 5 = -1 \quad \Rightarrow$ Cumple la ecuación.
$3x + y = 11 \rightarrow 3 \cdot 2 + 5 = 11 \quad \Rightarrow$ Cumple la ecuación.

Por tanto, se trata de un sistema compatible.

MÉTODO DE REDUCCIÓN:

Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por el método de reducción tendremos que:

a) **Buscar** un sistema equivalente en donde los coeficientes de una misma incógnita sean iguales y opuestos.
b) **Restar o sumar** las dos ecuaciones obtenidas, eliminando así una incógnita.
c) **Resolver** la ecuación con una incógnita que resulta.
d) **Sustituir** el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener el valor de la otra incógnita.
e) **Comprobar** que la solución obtenida verifica ambas ecuaciones.

Por ejemplo, vamos a resolver el sistema $\begin{cases} x+2y=25 \\ 2x+3y=40 \end{cases}$ por el método de reducción.

a) Obtenemos un sistema equivalente: elegimos, en ambas ecuaciones, una de las incógnitas, en este caso la x. Multiplicamos la primera ecuación por 2:

$$\begin{cases} 2\cdot(x+2y=25) \\ 2x+3y=40 \end{cases}$$

Ahora, el sistema equivalente a resolver es: $\begin{cases} 2x+4y=50 \\ 2x+3y=40 \end{cases}$

b) Restamos las dos ecuaciones del sistema para poder eliminar la x, y reducir el sistema:

$$\begin{array}{r} \cancel{2x}+4y=50 \\ -\quad \cancel{2x}+3y=40 \\ \hline y=10 \end{array}$$

c) Resolvemos la ecuación obtenida:

$$\boxed{y=10}$$

d) Sustituimos el valor y = 10 por ejemplo, en la primera ecuación:

$x+2y=25 \Rightarrow x+2\cdot 10=25$

$\boxed{x=5}$

e) Comprobamos la solución obtenida, para ello hay que sustituir los valores $x = 5$ e y = 10 en las dos ecuaciones:

$x+2y=25 \rightarrow 5+2\cdot 10=5+20=25$ $\Rightarrow$ Cumple la ecuación.
$2x+3y=40 \rightarrow 2\cdot 5+3\cdot 10=10+30=40$ $\Rightarrow$ Cumple la ecuación.

Por tanto, se trata de un sistema compatible.

4. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Para resolver problemas con sistemas de ecuaciones lineales, conviene proceder de la siguiente manera:

- ✓ **Leer detalladamente el enunciado del problema**. Implica comprenderlo, reconocer e identificar todos los datos dados, tanto los valores conocidos como las incógnitas o valores desconocidos.

- ✓ **Interpretar el enunciado del problema y expresar con lenguaje algebraico todos los datos del problema.** Obtendremos un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

- ✓ **Resolver el sistema de ecuaciones** por el método más apropiado.

- ✓ **Analizar y comprobar la solución obtenida.**

Por ejemplo, resolvamos el siguiente problema: *Alejandro ha pagado 6,60 € por tres kilos de naranjas y dos de manzanas. En la misma frutería, Ana ha pagado 3,90 € por dos kilos de naranjas y uno de manzanas. ¿Cuánto cuesta un kilo de naranjas? ¿Y uno de manzanas?*

- Identificamos y nombramos los elementos del problema:
  - Precio de un kilo de naranjas: x.
  - Precio de un kilo de manzanas: y
  - Coste de 3 Kg. de naranjas y 2 Kg. de manzanas: $3x + 2y$
  - Coste de 2 Kg. de naranjas y 1 Kg. de manzanas; $2x + y$
- Escribimos las ecuaciones que relacionan los elementos del problema:
  - Coste de la compra de Alejandro: $3x + 2y = 6,6$
  - Coste de la compra de Ana: $2x + y = 3,9$
- Resolvemos el sistema de ecuaciones obtenido:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+2y=6,6 \\ 2x+y=3,9 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -3x-2y=-6,6 \\ 4x+2y=7,8 \end{array}\right.$$

$$x \quad = 1,2$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y=3,9 \\ x=1,2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot 1,2+y=3,9 \Rightarrow 2,4+y=3,9 \Rightarrow y=3,9-2,4 \Rightarrow y=1,5$$

- Escribimos la solución en el contexto del problema:

Un kilo de naranjas cuesta 1,20 € y un kilo de manzanas cuesta 1,50 €

- Comprobación:

Alejandro: $3 \cdot 1,2 + 2 \cdot 1,5 = 6,60$ €
Ana: $2 \cdot 1,2 + 1 \cdot 1,5 = 2,4 + 1,5 = 3,90$€

ACTIVIDADES.

1. ¿Cuáles de los siguientes pares de números

a) $\begin{cases} x=4 \\ y=6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x=8 \\ y=12 \end{cases}$

son solución del sistema $\begin{cases} 3x-2y=0 \\ 5x+y=13 \end{cases}$?

2. Clasifica los siguientes sistemas según su solución (compatible o incompatible):

a) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 4x-2y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 6x+3y=15 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y=13 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$

3. Resuelve por el método de sustitución los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=1 \\ 5x-3y=5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3}+\dfrac{y-2}{2}=2 \\ \dfrac{3x-2}{4}+y=5 \end{cases}$

4. Resuelve por el método de igualación los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 6x+5y=11 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x-6y=2 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+10y=52 \\ x+\dfrac{y}{2}=8 \end{cases}$

5. Resuelve por el método de reducción los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} 5x+3=4y \\ -10x+8y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+5y=8 \\ 6x-10y=-4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=4 \\ x+y=10 \end{cases}$

6. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, empleando un método de resolución diferente para cada uno de ellos:

a) $\begin{cases} x+y=3 \\ 3x-y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 4x+2y=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y=2x+1 \\ y=2x-3 \end{cases}$

7. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método que consideres más adecuado:

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 6x = 5 - 4y \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = 1 \\ 3x - 6 = 2y \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + y = 4 \\ x + \dfrac{y}{4} = \dfrac{29}{8} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{x-y}{4} = 1 \\ y = x + 5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2 \cdot (-y) + \dfrac{x-y}{3} = 3x - 1 \end{cases}$

8. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método que consideres más adecuado:

$a)$ $\begin{cases} x = \dfrac{2y}{5} \\ x = 4y - 9 \end{cases}$

$b)$ $\begin{cases} 3x = 6 \\ 5x + \dfrac{4y}{3} = 14 \end{cases}$

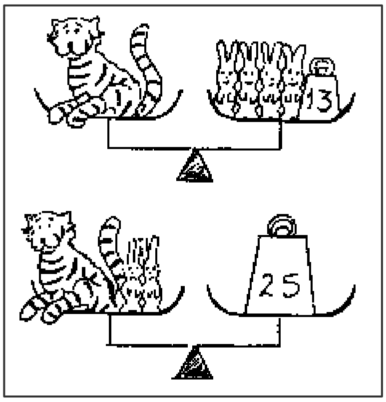
$c)$ $\begin{cases} 0,2x - 1,7y = 6,1 \\ 1,23x + 0,8y = 3,75 \end{cases}$

$d)$ $\begin{cases} \dfrac{x+3}{y} = 5 \\ 2 \cdot (x - 3y) + x = 9 \end{cases}$

$e)$ $\begin{cases} 3 \cdot (x+2) - 5(y+1) = 9 \\ 4x + \dfrac{5+3y}{2} = 5 \end{cases}$

$f)$ $\begin{cases} 2 \cdot (x-y) + \dfrac{x-y}{3} = 3x - 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$

9. Observa la siguiente balanza en la que hay tigres y conejos. Todos los tigres pesan lo mismo y también todos los conejos tienen el mismo peso. Los números de las pesas expresan kilogramos. ¿Sabrías averiguar cuánto pesa cada tigre y cada conejo?



10. Hemos pagado una factura de 435 € con billetes de 5€ y de 10€. En total hemos dado 60 billetes. Averigua cuántos de cada clase.

11. En un bar se venden bocadillos de jamón a 3,50 € y de tortilla a 2 €. En una mañana se vendieron 52 bocadillos y se recaudaron 149 € ¿Cuántos se vendieron de cada clase?

12. Hace 10 años la edad de una persona era el doble de la de otra y dentro de 16 años, la edad de la primera será $\dfrac{4}{3}$ la de la segunda. Calcula la edad actual de esas dos personas.

13. Un comerciante adquirido dos partidas de café, de 9 €/ Kg. y de 13 €/ Kg., por 510 €. Ambas partidas suman 50 Kg. ¿Cuántos Kg. de cada tipo ha adquirido?

14. Un empleado cobra 20 € diarios cuando acude al trabajo y cuando no asiste le descuentan 5 €. Sabiendo que después de 25 días la cantidad de dinero que recibe es de 450 € determinar el número de días que asistió al trabajo.

15. La base de un rectángulo es 15 m mayor que la altura. El perímetro mide 70 m. Calcula la longitud de los lados del rectángulo.

16. En un corral hay 27 animales entre conejos y gallinas. Si en total hay 96 patas, ¿cuántos animales hay de cada clase?

17. Un trabajador gana 40 euros en un turno de día y 75 euros en un turno de noche. En un mes ha hecho 22 turnos en total y ha ganado 1 300 euros. ¿Cuántos turnos de día ha hecho? ¿Y de noche?

18. Un padre tiene el triple de la edad de su hijo y dentro de 13 años la edad del padre será el doble que la del hijo. ¿Qué edad tiene cada uno?

19. En un examen tipo test de 25 preguntas se obtienen 0,4 puntos por cada respuesta correcta y se restan 0,15 puntos por cada respuesta fallada. Si mi nota ha sido de 6,15 ¿cuántos aciertos y cuántos errores he tenido?

20. En una fábrica de zumos se mezclan dos tipos de calidades, una de 50 céntimos el litro y otra de 80 céntimos el litro. ¿Cuántos litros de zumo han de mezclarse de cada tipo para obtener 120 litros con un coste total de 85,50 €?

21. Una empresa fabrica dos tipos de bicicletas, A y B. Para fabricar una del modelo A, se necesitan 1 Kg. de acero y 3 Kg. de aluminio, y para una del modelo B, 2 Kg. de cada uno de esos materiales. Si la empresa dispone de 80 Kg. de acero y 120 Kg. de aluminio, ¿cuántas bicicletas de cada tipo puede fabricar?

22. Una mula y un burro van cargados con sacos de harina. Ante las reiteradas quejas del burro, le dice la mula: "No te quejes, pues si yo te diera a ti un saco, los dos llevaríamos la misma carga, y si me lo dieras tú a mí, yo llevaría el doble que tú". ¿Cuántos sacos lleva cada animal?

23. Hallar dos números sabiendo que si se divide el mayor por el menor, da como cociente 4 y resto 1, y si se divide el quíntuplo del menor por el mayor, el cociente es 1 y el resto 2.

24. En una fiesta participan 36 personas, entre las cuales hay doble de número de mujeres que de hombres. El número de niños es la mitad que el de adultos. Calcula el número de hombres, mujeres y niños.

25. Una persona obtiene un montón de monedas de 20 céntimos de euros en una tragaperras. Las cambia por monedas de 1 euros sin ganar ni perder en el cambio, quedando al final con 60 monedas menos que al principio. Halla el dinero que tiene.

26. El dueño de una tienda vende unas golosinas que cuestan 4 €/Kg., y otras que cuestan 6 €/Kg. Decide mezclarlas y venderlas a 5,40 €/Kg. Si en total quiere preparar 5 kilos, ¿qué cantidad de cada tipo tendrá que mezclar?

27. Entre tú y yo tenemos 126 €. Si lo que yo tengo aumentara en un 14% entonces tendría el 75% de lo que tienes tú. ¿Cuánto dinero tenemos cada uno?

28. Un grupo de estudiantes organiza una excursión, para lo cual alquilan un autocar cuyo coste es de 540 €. Al salir, aparecen 6 estudiantes más, y esto hace que cada uno de los anteriores pague 3 € menos. ¿Cuántos estudiantes iban inicialmente a la excursión? ¿Qué cantidad debía pagar cada uno?

29. Se ha fundido una cadena de oro del 80% de pureza junto con un anillo del 64% de pureza. Así se han obtenido 12 gramos de oro de una pureza del 76%. ¿Cuántos gramos pesaba la cadena y cuántos el anillo?

30. He pagado 90,50 € por una camisa y un jersey que costaban, entre los dos, 110 €. En la camisa me han rebajado un 20% y en el jersey un 15%. ¿Cuál era el precio original de cada artículo?

31. Quiero comprar seis lámparas iguales y cinco sillas que exponen en una tienda. El conjunto cuesta 640 €. El comerciante que es un amigo y me hace un descuento del 10% en las lámparas y del 20% en las sillas, con lo que el importe ahora es de 534,50 €. ¿Qué precio marcaban las lámparas y las sillas?

32. Un millonario algo pintoresco dice que regalará un viaje al Caribe a quien le traiga 500 euros en billetes de 20 y 50 € con la condición de que reúna esta cantidad utilizando exactamente 17 billetes. Analiza este trato y di qué te parece. ¿Cambiaría algo si en lugar de 500 pidiera 460 €?

33. Los animales de un laboratorio deben mantenerse bajo una dieta estricta que les exige ingerir exactamente 10 g de proteínas y 3 g de grasas diarios. Se dispone en el laboratorio de dos tipos de alimentos: El tipo A, con un 5% de proteínas y un 3% de grasas, y el tipo B con un 10% de proteínas y un 1% de grasas. ¿Cuántos gramos de cada alimento hay que suministrar a cada animal diariamente para seguir correctamente la dieta?

34. Una empresa de productos plásticos recibe el encargo de fabricar cierto número de macetas para un día determinado. Al planificar la producción, el gerente advierte que si fabrican 250 macetas diarias, faltarían 150 macetas al concluir el plazo que les han dado. Si fabrican 260 macetas diarias, entonces les sobrarían 80 macetas. ¿Cuántos días de plazo tenían y cuántas macetas le encargaron?

35. Una persona jugando a los chinos tiene monedas en ambas manos si pasa dos monedas de la mano derecha a la izquierda, tendrá el mismo número de monedas en ambas manos; mientras que si pasa tres monedas de la izquierda a la derecha, tendrá en ésta el doble de monedas que en la otra. ¿Cuántas monedas tiene en cada mano?

36. ¿Cuántos litros de leche con un 10 % de grasa hemos de mezclar con otra leche que tiene un 4 % de grasa para obtener 18 litros con un 6 % de grasa?

37. La calificación de una oposición se obtiene mediante dos exámenes: uno escrito, que es el 65 % de la nota final, y otro oral, que es el 35 %. Si una persona obtuvo 12 puntos entre los dos exámenes y un 5,7 de nota final, ¿qué nota tuvo en cada uno de ellos?

38. En un pueblo aislado de la sierra de 1.200 habitantes, con un clima tan sano que no hay viudos ni viudas, están casados el 35% de los hombres y el 40% de las mujeres, (¡ojo! todos monógamos). ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres hay en el pueblo?

39. Un tren de cercanías sale de una estación a 90 Km./h. Media hora más tarde, sale otro más rápido en la misma dirección a 110 Km./h. ¿Cuánto tardará en alcanzar al primero?

Unidad 3: Iniciación a la Estadística.

La Estadística es la parte de las Matemáticas que se ocupa de recoger, analizar y extraer información relevante y útil de un conjunto de datos obtenidos. Esta información aparece en forma de números, porcentajes y/o a través de gráficos.

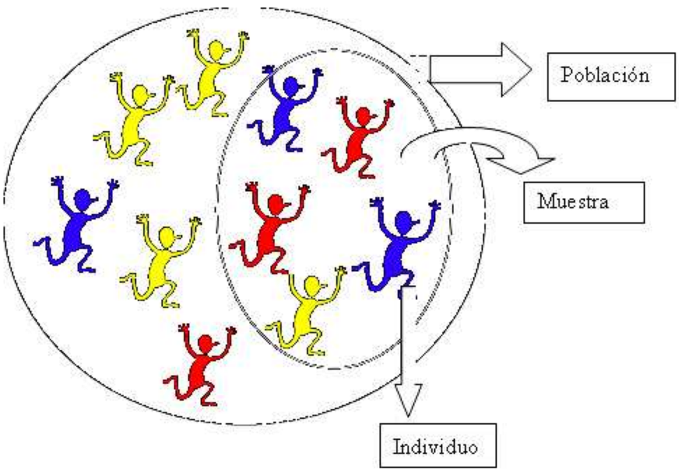
En nuestros días, la Estadística, se ha convertido en un método efectivo para describir valores de datos económicos, políticos, sociales, psicológicos, biológicos y físicos. Sirve como herramienta para relacionar y analizar estos datos, así como para establecer predicciones, comparaciones y generalizaciones sobre una población a partir de los datos obtenidos de una muestra.

En esta unidad, trataremos principalmente de conocer las nociones básicas sobre esta rama de las Matemáticas, de ser capaces de interpretar correctamente el resultado de una encuesta y realizar gráficos estadísticos. Por último también estudiaremos unos valores que intentan resumir con menos números el conjunto de todos los datos obtenidos.

1. INDIVIDUO, POBLACIÓN Y MUESTRA.

En Estadística se utilizan diversos términos que debemos conocer:

- **POBLACIÓN**: Es el conjunto de todos los elementos objeto de estudio. A veces no es posible estudiar todos los elementos de la población y estudiamos sólo una parte de ella. **MUESTRA** es la parte de la población que estudiamos y nos sirve para deducir características de toda la población.



- **INDIVIDUO:** Es cada uno de los elementos que forman la población o la muestra. Al número de individuos que componen una muestra se le llama **TAMAÑO DE LA MUESTRA**.

- **CARÁCTER O VARIABLE ESTADÍSTICA:** Es cualquier cualidad que estudiamos en los individuos de la muestra. Las variables estadísticas pueden ser:
    - **Cuantitativas:** cuando los datos recogidos son valores numéricos.
    - **Cualitativas:** cuando los datos recogidos no son números, sino cualidades o modalidades.

Por ejemplo: se realiza una encuesta de intención de voto de cara a las próximas elecciones europeas. Para ello se pregunta a 100 personas en cada Comunidad Autónoma

- Población: todas las personas con derecho a voto residentes en el país.
- Individuo: cada una de esas personas.
- Muestra: cien persona de cada Comunidad Autónoma. EL tamaño de la muestra es, por tanto, 1700 personas.
- Variables estadísticas: edad del individuo (cuantitativa), sexo (cualitativa), intención de voto (cualitativa)…

2. DATOS Y FRECUENCIAS.

Después de recopilar los datos de un estudio estadístico efectuamos el recuento de los mismos, agrupando los que sean iguales con el fin de ordenarlos.

Si la variable es cuantitativa, se ordenan los datos de menor a mayor; si es cualitativa, se escribe cada valor (modalidad) y se anota el número de veces que aparece.

Por ejemplo:

➢ En unos grandes almacenes van dar un uniforme nuevo a todas las cajeras. Anotamos las tallas que tienen:

Datos
40 – 42 – 44 – 40 – 48
38 – 42 – 46 – 42 – 44
42 – 40 – 42 – 46 – 44
40 – 38 – 36 – 44 – 42

Recuento
36 → / → 1
38 → / / → 2
40 → / / / / → 4
42 → / / / / / / → 6
44 → / / / / → 4
46 → / / →2
48 → / → 1

➢ Las calificaciones obtenidas por los alumnos en el Ámbito Científico – Tecnológico, quedan recogidas en la siguiente tabla:

Datos
SF – SF – B – N – N
N – I – SB – I – I
SB – B – I – B – SF
I – SF – N – N –I
N – SF – SF – I – N

Recuento
I (Insuficiente)→ / / / / / / /→ 7
SF (Suficiente) → / / / / / / → 6
B (Bien) → / / / → 3
N (Notable) → / / / / / / / → 7
SB (Sobresaliente) → / / → 2

Los resultados, después de ordenarlos, se organizan en tablas donde aparecen las frecuencias absolutas, las frecuencias relativas y los porcentajes correspondientes a cada valor o modalidad.

- **FRECUENCIA ABSOLUTA** de un dato estadístico es el número de veces que se repite ese dato. Se representa por f_i.
- **FRECUENCIA RELATIVA** de un dato estadístico es el cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de datos. Se representa por h_i. Si llamamos N al número total de datos, entonces: $h_i = \frac{f_i}{N}$.

Para calcular el porcentaje de cada dato, multiplicamos la frecuencia relativa por 100.

Ejemplos:

- Una empresa que fabrica automóviles desea conocer las preferencias de los automovilistas sobre los colores. Para ellos pasaron un cuestionario a sus clientes y estos fueron los resultados obtenidos:

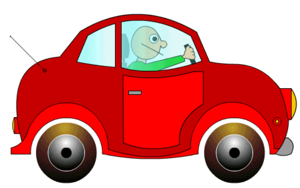
Color del coche	**Frecuencia absoluta f_i**	**Frecuencia relativa** $h_i = \frac{f_i}{N}$	**Porcentaje**
Azul marino	20	$\frac{20}{110} = 0{,}18$	18%
Verde manzana	11	$\frac{11}{110} = 0{,}1$	10%
Rojo clavel	21	$\frac{21}{110} = 0{,}19$	19%
Amarillo metalizado	15	$\frac{15}{110} = 0{,}14$	14%
Plateado	17	$\frac{17}{110} = 0{,}15$	15%
Rojo metalizado	26	$\frac{26}{110} = 0{,}24$	24%

La suma de las frecuencias absolutas es igual a 110, es el número de clientes que contestaron la encuesta.

$$20 + 11 + 21 + 15 + 17 + 26 = 110$$

La suma de las frecuencias relativas siempre es igual a 1.

$$0{,}18 + 0{,}1 + 0{,}19 + 0{,}14 + 0{,}15 + 0{,}24 = 1$$



- En un tramo de carretera la velocidad está limitada a 100 Km/h. Se quiere estudiar si los automóviles respetan efectivamente esta limitación. Para ello, se mide la velocidad de los coches que pasan durante cierto periodo de tiempo y se obtienen los datos reflejados a continuación:

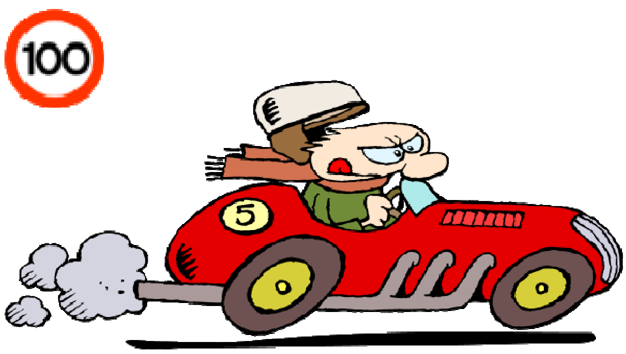
Velocidad	**Frecuencia absoluta** f_i	**Frecuencia relativa** $h_i = \frac{f_i}{N}$	**Porcentaje**
85	4	$\frac{4}{35} = 0{,}11$	11%
92	5	$\frac{5}{35} = 0{,}14$	14%
98	2	$\frac{2}{35} = 0{,}06$	6%
100	2	$\frac{2}{35} = 0{,}06$	6%
110	12	$\frac{12}{35} = 0{,}34$	34%
117	5	$\frac{5}{35} = 0{,}14$	14%
120	3	$\frac{3}{35} = 0{,}09$	9%
125	2	$\frac{2}{35} = 0{,}06$	6%

La suma de las frecuencias absolutas es igual a 35, es el número de coches cuyas velocidades fueron medidas durante ese periodo de tiempo.

$$4 + 5 + 2 + 2 + 12 + 5 + 3 + 2 = 35$$

La suma de las frecuencias relativas siempre es igual a 1.

$$0{,}11 + 0{,}14 + 0{,}06 + 0{,}06 + 0{,}34 + 0{,}14 + 0{,}09 + 0{,}06 = 1$$



3. GRÁFICOS ESTADÍSTICOS.

En el apartado anterior hemos agrupado los resultados obtenidos en un estudio estadístico en tablas. Esto hace que un conjunto más o menos grande de observaciones se pueda comprender mejor. Pero para entender rápidamente cómo se distribuye un conjunto de datos son muy útiles los gráficos. Lo fundamental es la claridad, que con un vistazo se consiga una gran cantidad de información.

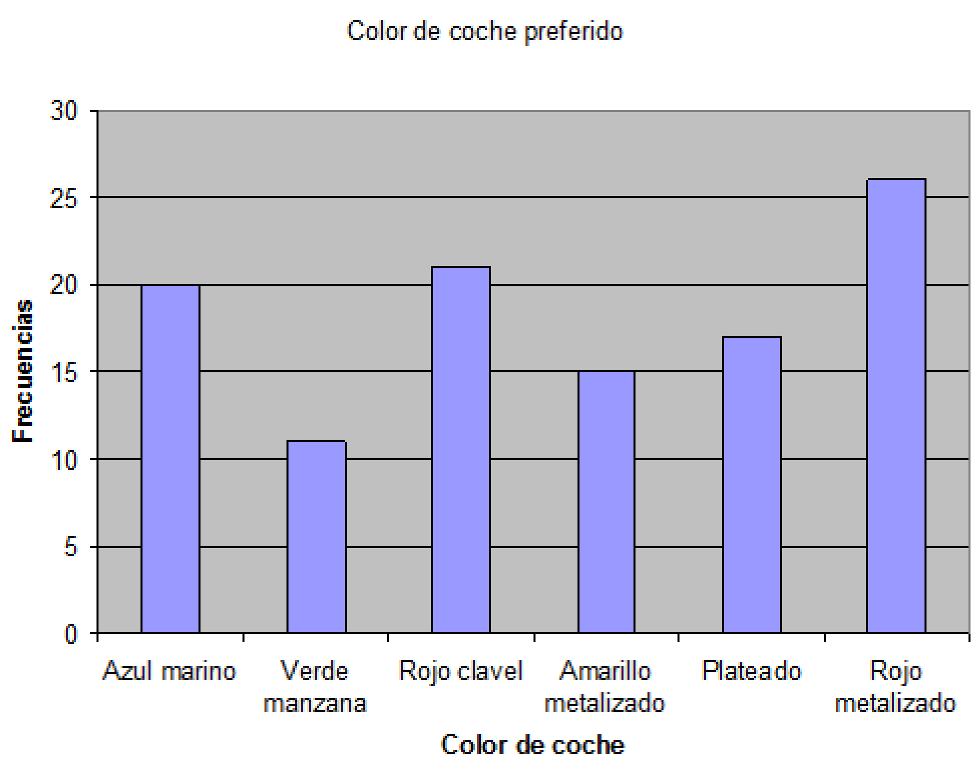
Vamos a ver algunos de los tipos de gráficos que se pueden confeccionar.

DIAGRAMA DE BARRAS.

El **diagrama de barras** se utiliza para representar variables cuantitativas que toman pocos valores distintos. También es útil para representar variables cualitativas.

- En el eje de abcisas (eje X, horizontal) representamos los datos.
- En el eje de ordenadas (eje Y, vertical) representamos las frecuencias.
- Sobre cada dato se representa una barra de altura la frecuencia absoluta correspondiente.

Por ejemplo, vamos a representar gráficamente los datos obtenidos en los dos ejemplos anteriores (apartado 2).



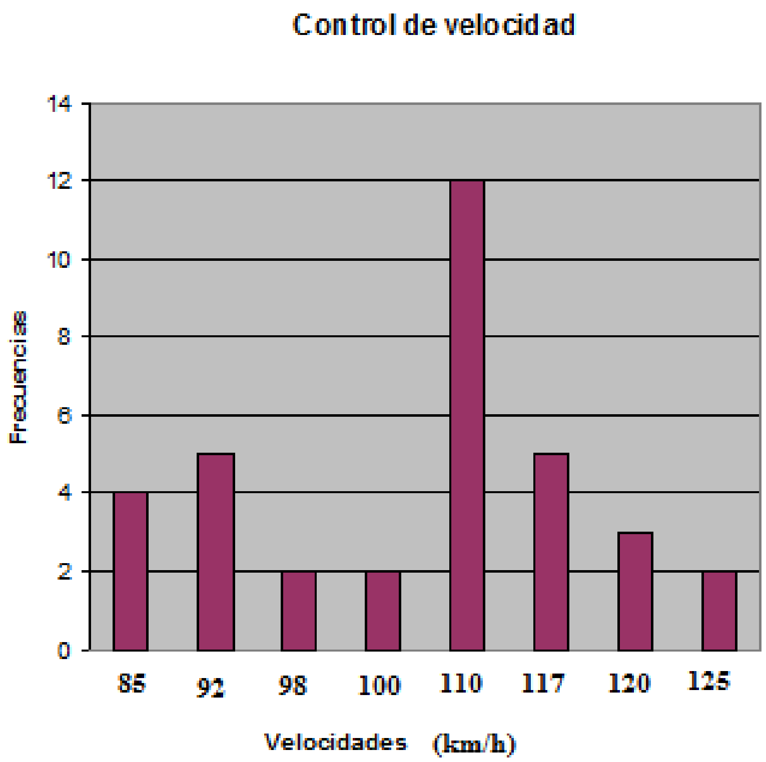


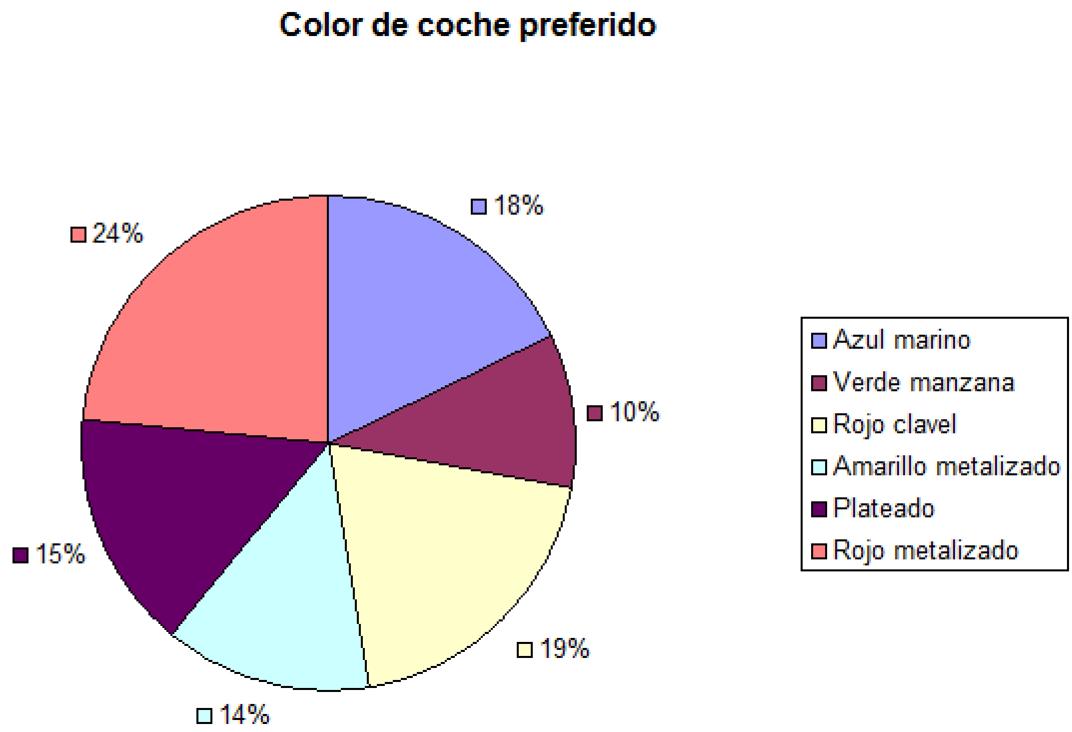
DIAGRAMA DE SECTORES.

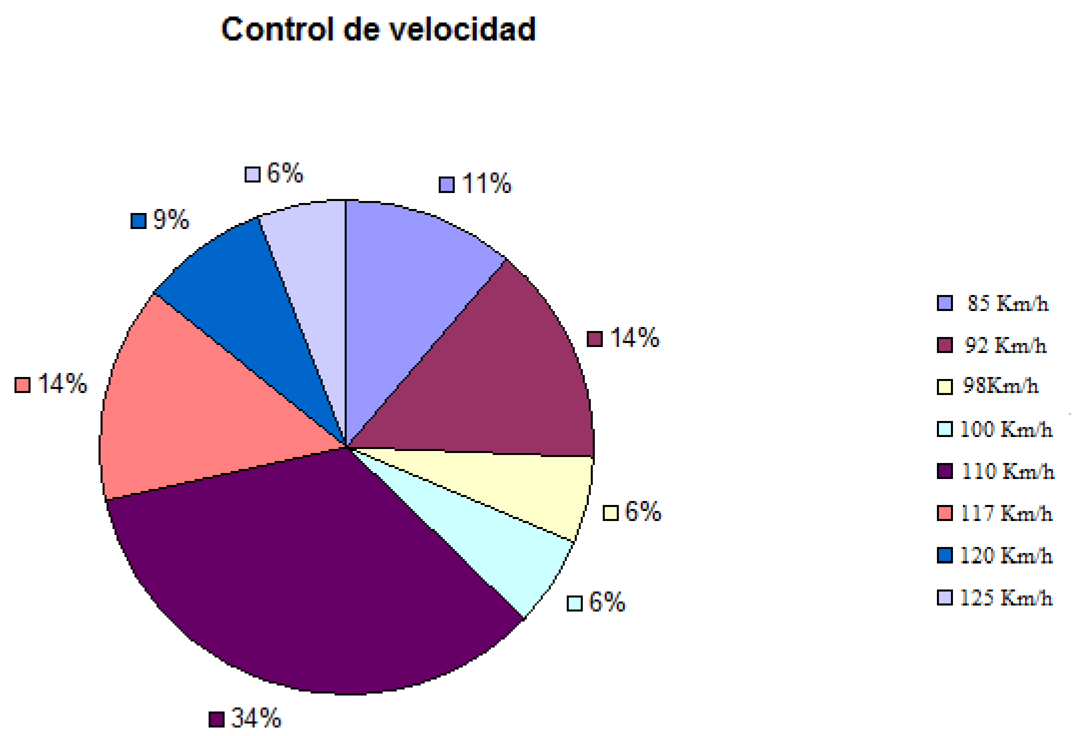
El **diagrama de sectores** sirve para representar frecuencias de cualquier tipo de variable.

- Los datos se representan en un círculo. Cada sector representa la parte proporcional a la frecuencia.
- El ángulo de cada sector circular es proporcional a la frecuencia de cada dato.
- Cada sector circular se obtiene multiplicando la frecuencia absoluta por 360º y dividiendo entre el número total de datos, $f_i \cdot \frac{360^{\circ}}{N} = h_i \cdot 360^{\circ}$.
- También se suele incluir en cada sector el valor del porcentaje correspondiente.

Este tipo de gráfico resulta especialmente útil cuando lo que se quiere es comparar distintas distribuciones.

Veamos la representación en un diagrama de sectores de los dos ejemplos anteriores:



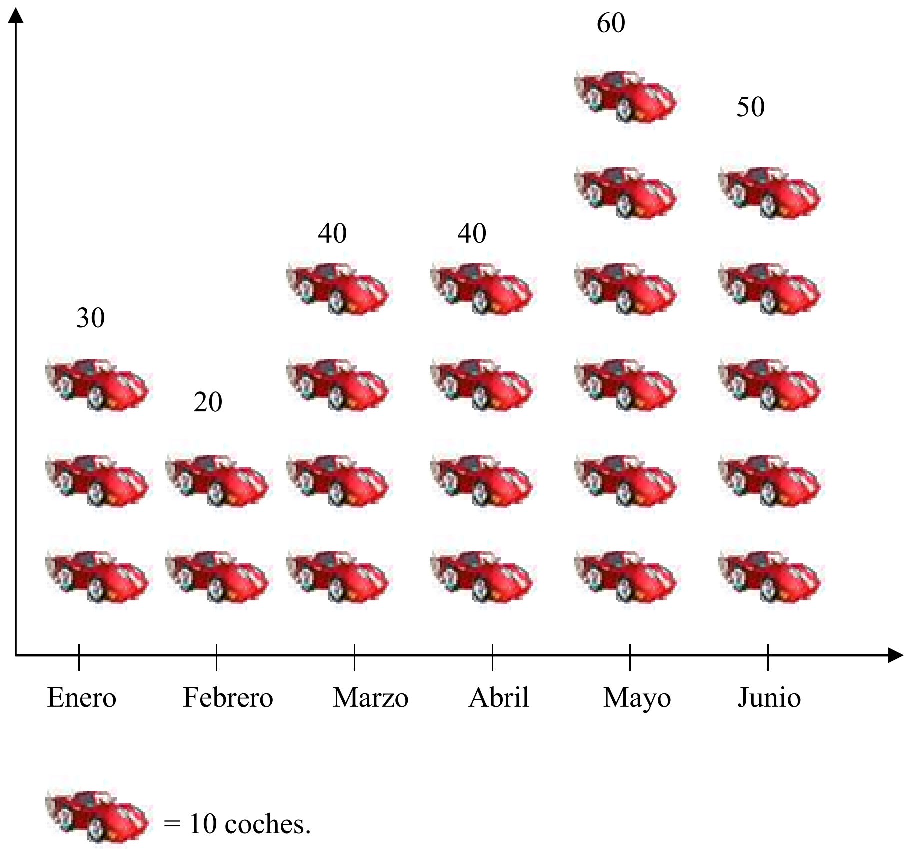


PICTOGRAMA.

El **pictograma** es un gráfico estadístico que se utiliza generalmente para variables de tipo cualitativo o también en estudios que muestran la evolución de un estudio a lo largo del tiempo.

- En el eje de abcisas (eje X, horizontal) se representan los datos.
- Sobre cada dato se representa una figura alusiva a la variable que estamos estudiando, cuya altura o tamaño es proporcional a la frecuencia del dato.

Por ejemplo, vamos a representar mediante un pictograma las ventas obtenidas por un concesionario durante los seis primeros meses del año.



Además del gráfico, también se suelen escribir las etiquetas de cada modalidad y la frecuencia correspondiente.

4. PARÁMETROS ESTADÍSTICOS.

Los parámetros estadísticos sirven para sintetizar la información dada por una tabla o por una gráfica. Los hay de dos tipos: de centralización y de dispersión.

Los **parámetros de centralización** nos indican en torno a qué valor (centro) se distribuyen los datos.

Los **parámetros de dispersión** nos informan sobre cuánto se alejan del centro los valores de la distribución.

4.1. MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN.

Como acabamos de indicar, las **medidas de centralización** son valores en torno de los cuales, frecuentemente, se agrupan los datos.

Las principales medidas son la media aritmética, la mediana y la moda.

MEDIA ARITMÉTICA.

La **media aritmética** de un conjunto de datos coincide con su valor medio, se representa por $\overline{X}$ y es un valor que:

- Está entre el menor y el mayor valor del conjunto de datos.
- Es único y puede no coincidir con ninguno de los datos de la muestra.
- Sólo es posible obtenerlo en variables estadísticas cuantitativas.

Para calcular la media aritmética, cuando los datos están ordenados en uuna tabla de frecuencia, se aplica la siguiente fórmula:

$$\overline{X} = \frac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + \ldots + f_n \cdot x_n}{N}$$

donde f_i es la frecuencia absoluta del dato x_i y N representa el número total de datos.
($N = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$)

Por ejemplo, hemos recogido en la siguiente tabla las notas obtenidas en el último examen de Matemáticas por un grupo de alumnos:

Nota	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº alumnos	0	0	0	0	1	10	14	5	2	1	0

La media será: $\overline{X} = \dfrac{4+5\cdot 10+6\cdot 14+7\cdot 5+8\cdot 2+9}{33} = \dfrac{4+50+84+35+16+9}{33} = \dfrac{198}{33} = 6$.

Consideremos las notas obtenidas en el mismo examen por otro grupo de alumnos:

Nota	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº alumnos	0	5	4	2	2	1	1	2	3	4	8

La media, en este caso, será:

$$\overline{X} = \frac{5+2\cdot 4+3\cdot 2+4\cdot 2+5+6+7\cdot 2+8\cdot 3+9\cdot 4+10\cdot 8}{32} =$$

$$= \frac{5+8+6+8+5+6+14+24+36+80}{32} = \frac{192}{32} = 6$$

Observemos que, en ambos casos la media de las notas obtenidas es la misma (un 6) y, sin embargo, los resultados obtenidos en cada grupo son muy diferentes. La media aritmética es muy sensible a las puntuaciones extremas. Necesitaremos pues, otros parámetros para señalar las diferencias existentes.

MEDIANA.

La **mediana** de un conjunto de datos es el valor central de ellos, es decir, hay tantos valores mayores que él como menores. Su símbolo es **Me**. Sólo se puede calcular cuando la variable es cuantitativa y su valor es único.

- Si el conjunto de datos tiene un número de valores impar, la mediana es el término que ocupa el centro, después de ordenarlos en orden creciente.

- Si el conjunto de datos es par, la mediana es la media aritmética de los valores centrales.

Continuemos con el ejemplo anterior. En el primer caso hay una cantidad impar de datos (las notas de los 33 alumnos). En la tabla teníamos ordenados los datos en orden creciente:

Nota	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº alumnos	0	0	0	0	1	10	14	5	2	1	0

El valor central será el que ocupe la posición 17 (16 + 1 + 16 = 33) que corresponde a una calificación de 6. Luego, Me = 6.

En este caso, la media y la mediana coinciden pero no siempre ocurre así ya que, la mediana siempre coincide con alguno de los datos del estudio mientras que el valor de la media puede no coincidir con ninguno de ellos.

En las calificaciones obtenidas por el segundo grupo de alumnos tenemos una cantidad par de datos (las notas de 32 alumnos). En la tabla teníamos ordenados los datos en orden creciente:

Nota	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº alumnos	0	5	4	2	2	1	1	2	3	4	8

Los dos valores centrales son los que corresponden a los valores que ocupan las posiciones 16 y 17 (15 + 1 + 1 + 15 =32) que corresponden, en ambos casos, a la calificación 7. Obviamente, la media aritmética de estas dos notas será también un 7. Luego Me = 7.

MODA.

La **moda** de un conjunto de datos es el valor que más se repite o que mayor frecuencia tiene. Su símbolo es **Mo**.

- La moda se puede calcular en cualquier tipo de variable estadística.
- La moda es el valor o valores que tienen mayor frecuencia. Si la mayor frecuencia corresponde a más de un dato decimos que la serie es **bimodal** (tiene dos modas) o **multimodal** (tiene más de dos modas).

Volviendo al ejemplo anterior de las notas obtenidas por los grupos de alumnos, en el primer caso la distribución tendría una única moda, Mo = 6 (es el dato que tiene mayor frecuencia, se repite 14 veces) y en el segundo caso, también habría una única moda, Mo = 10 (es el dato que más se repite, 8 veces).

Veamos otro ejemplo, con una variable cualitativa. Una emisora de radio ha realizado una encuesta para averiguar las preferencias musicales de sus oyentes. Estos han sido los resultados obtenidos.

Tipo de música	Rock	Pop	Tecno	Country	Baladas	Jazz
Frecuencia	30	30	25	18	20	15

En este caso, la distribución es bimodal (tiene dos modas) puesto que hay dos datos que comparten la misma frecuencia máxima, luego la moda, en este caso es Mo = Rock y Mo = Pop.

Hemos visto tres medidas de centralización: la media, la mediana y la moda. Estas medidas sirven para representar con un solo valor el conjunto de datos. Según el tipo de carácter que estudiemos, la cantidad de datos e incluso el tiempo del que dispongamos, será aconsejable utilizar una u otra.

- La **media** es generalmente la medida que mejor representa el conjunto de los datos, ya que utiliza para su cálculo todos ellos. En ocasiones, esto puede ser un inconveniente, ya que si hay algún dato muy alejado de los demás puede distorsionar la media.
- La **mediana** se calcula con facilidad y no le afectan los valores muy alejados de los demás, pero a veces no representa muy bien el conjunto de los datos ya que sólo depende de ellos por su orden y no por su valor.
- La **moda** es muy sencilla de calcular, pero es poco precisa. En una misma distribución puede haber varias modas y también puede cambiar fácilmente al variar un solo dato.

En cada caso, habrá que decidir cuál de ellas conviene más al estudio que estamos realizando.

4.2. MEDIDAS DE DISPERSIÓN.

Las **medidas de dispersión** nos indican el grado de agrupación de los datos en torno a la media, la mediana y la moda.

Cuanto más pequeñas sean las medidas de dispersión, más agrupados estarán los datos alrededor de las medidas de centralización y, por tanto, más representativas serán la media, la mediana y la moda.

Veremos dos medidas de dispersión, el rango o recorrido, la varianza y la desviación típica.

RECORRIDO O RANGO.

El **recorrido o rango** de un conjunto de datos es la diferencia entre el mayor y el menor de los datos.

El recorrido tiene la ventaja de que su cálculo es muy sencillo, pero da una información limitada puesto que sólo utilizamos dos datos para calcularlo, sin tener en cuenta el resto.

Por ejemplo, para comparar el clima de dos ciudades se toman las temperaturas medias mensuales a lo largo de un año, obteniéndose los siguientes datos:

	Ene.	Feb.	Mar.	Abril	May.	Jun.	Jul.	Ag.	Sept.	Oct.	Nov.	Dic.
Ciudad 1	– 4	2	4	6	17	23	35	33	20	19	4	– 3
Ciudad 2	10	13	14	14	13	16	15	16	15	11	9	10

Vamos a calcular la temperatura media en ambas ciudades:

Ciudad 1: $\overline{X} = \dfrac{-4+2+4+6+17+23+35+33+20+19+4-3}{12} = \dfrac{156}{12} = 13^{\circ}\,C$

Ciudad 2: $\overline{X} = \dfrac{10+13+14+14+13+16+15+16+15+11+9+10}{12} = \dfrac{156}{12} = 13^{\circ}\,C$

Observemos que, a pesar de que la media de temperaturas es igual en ambas ciudades, tienen un clima muy distinto. En la ciudad 1 las temperaturas están muy alejadas de la media, mientras que en la ciudad 2 están agrupadas.

En la ciudad 1, cuyas temperaturas tienen mucha dispersión, hay valores muy altos y muy bajos. En cambio, en la ciudad 2, los valores de las temperaturas son muy parecidos.

Vamos a calcular el recorrido en ambas ciudades:

Ciudad 1: Recorrido = 35 – (– 4) = 39
Ciudad 2: Recorrido = 16 – 9 = 7

El menor recorrido en los valores de las temperaturas en la ciudad 2 nos indica una menor dispersión de los datos en esta ciudad.

VARIANZA Y DESVIACIÓN TÍPICA.

La varianza y la desviación típica son las medidas de dispersión que más se utilizan.

La **varianza** es el promedio de los cuadrados de las distancias de los datos a la media.

$$V = \frac{\left(x_1 - \overline{X}\right)^2 + \left(x_2 - \overline{X}\right)^2 + \ldots + \left(x_n - \overline{X}\right)^2}{N}$$

(N representa el número total de datos)

Está fórmula es equivalente a la siguiente (que es la que más se utiliza en la práctica):

$$V = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{N} - \overline{X}^2$$

La desviación típica (σ) es la raíz cuadrada de la varianza: $\sigma = \sqrt{V}$.

La desviación típica junto con la media proporciona una información importante sobre la distribución objeto de estudio ya que la información que da cada uno de ellos complementa a la del otro. La **media** nos dice dónde está el centro de la distribución. La **desviación típica** orienta sobre cómo de alejados o dispersos, están los datos.

¿Por qué utilizar la desviación típica y no la varianza? La varianza tiene un grave inconveniente. Imaginemos que estamos tratando con una distribución de estaturas dadas en cm. La media vendría dada en cm pero la varianza vendría en cm^2 (una superficie en lugar de una longitud). Por eso extraemos su raíz cuadrada, obteniendo la desviación típica que, en este caso, sí sería una longitud dada en cm.

Volvamos al ejemplo anterior para calcular las desviaciones típicas:

Ciudad 1:

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{(-4)^2 + 2^2 + 4^2 + 6^2 + 17^2 + 23^2 + 35^2 + 33^2 + 20^2 + 19^2 + 4^2 + (-3)^2}{12} - 13^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{16+4+16+36+289+529+1225+1089+400+361+16+9}{12} - 169} = \sqrt{\frac{3990}{12} - 169} =$$

$$= \sqrt{332{,}5 - 169} = \sqrt{163{,}5} = 12{,}79 \Rightarrow \sigma_1 = 12{,}79$$

Ciudad 2:

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{10^2 + 13^2 + 14^2 + 14^2 + 13^2 + 16^2 + 15^2 + 16^2 + 15^2 + 11^2 + 9^2 + 10^2}{12} - 13^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{100+169+196+196+169+256+225+256+225+121+81+100}{12} - 169} = \sqrt{\frac{2094}{12} - 169} =$$

$$= \sqrt{174{,}5 - 169} = \sqrt{5{,}5} = 2{,}35 \Rightarrow \sigma_2 = 2{,}35$$

La menor desviación típica de las temperaturas registradas en la ciudad 2 indica que los valores obtenidos están mas próximos a la media (13ºC) que en la ciudad 2, donde su mayor desviación típica indica una mayor dispersión de los datos que se alejan de la media debido a la presencia de temperaturas extremas.

ACTIVIDADES.

1. Una población en Estadística es:

    a. Una ciencia.
    b. Un conjunto de técnicas para aplicar en los muestreos.
    c. Una técnica que utilizan los jefes de Estado.
    d. Una tabla de números.

2. Una población en Estadística es:

    a. Un conjunto de datos.
    b. El número de habitantes de una comarca.
    c. Los elementos existentes en una población.
    d. Una colección o colectivo de elementos.

3. Se quiere realizar un estudio estadístico de las alturas de los alumnos de 4º de E. S. O. de un instituto, ¿cómo se le denomina a este hecho en Estadística?

    a. Muestra.
    b. Población.
    c. Individuo.
    d. Tamaño de la muestra.

4. Si tomamos el curso de 4º B del centro anterior para hacer el estudio estadístico de las alturas de los alumnos, ¿qué nombre recibe en Estadística?

    a. Muestra.
    b. Población.
    c. Individuo.
    d. Tamaño de la muestra.

5. Cada uno de los alumnos que forman parte de la clase donde se está realizando el estudio estadístico de las alturas recibe en Estadística el nombre de:

    a. Muestra.
    b. Población.
    c. Individuo.
    d. Tamaño de la muestra.

6. El número total de alumnos de 4º B, curso elegido para realizar el estudio estadístico de las alturas, representa en Estadística:

   a. La muestra.
   b. La población.
   c. El individuo.
   d. El tamaño de la muestra.

7. De las variables siguientes, ¿cuáles se pueden medir?

   a. Número de hermanos.
   b. Número de calzado.
   c. Edad.
   d. Ingresos diarios en una frutería.
   e. Edades de un grupo de alumnos.

8. Señala las variables cualitativas:

   a. Número de hermanos.
   b. Sexo.
   c. Nacionalidad.
   d. Número de calzado.
   e. Edad.

9. Señala las variables cuantitativas:

   a. Número de hermanos.
   b. Sexo.
   c. Nacionalidad.
   d. Número de calzado.
   e. Edad.

10. Indica, para cada uno de los cinco casos propuestos:

   - Cuál es la población.
   - Cuál es la variable.
   - Tipo de variable.

   a) Peso al nacer de los bebés que se alumbraron en la Región de Murcia a lo largo del año pasado.
   b) Profesiones que quieren tener los estudiantes de un centro escolar.
   c) Número de animales de compañía que hay en los hogares españoles.
   d) Partido al que se va a votar en las próximas elecciones generales.
   e) Tiempo semanal que dedican a la lectura los estudiantes de la ESO en España.
   f) Número de tarjetas amarillas mostradas en los partidos de fútbol de la temporada pasada.
   g) Tiempo dedicado a las tareas domésticas por los hombres y mujeres que trabajan fuera del hogar.
   h) Número de aparatos de televisión que hay en los hogares españoles.

11. Se ha lanzado 30 veces un dado obteniéndose los siguientes resultados:

1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6

Realiza el recuento y organiza en una tabla las frecuencias (absoluta y relativa) y los porcentajes.

12. Al preguntar por el número de libros leídos en el último mes a los estudiantes de un grupo de 4º de E. S. O., hemos obtenido los datos siguientes:

2	1	3	1	1	5	1	2	4	3
1	0	2	4	1	0	2	1	2	1
3	2	2	1	2	3	1	2	0	2

Organiza todos estos datos en una tabla de frecuencias y realiza el diagrama de barras correspondiente.

13. Se lanza 30 veces un dado de quinielas (1, X, 2), obteniéndose los siguientes resultados:

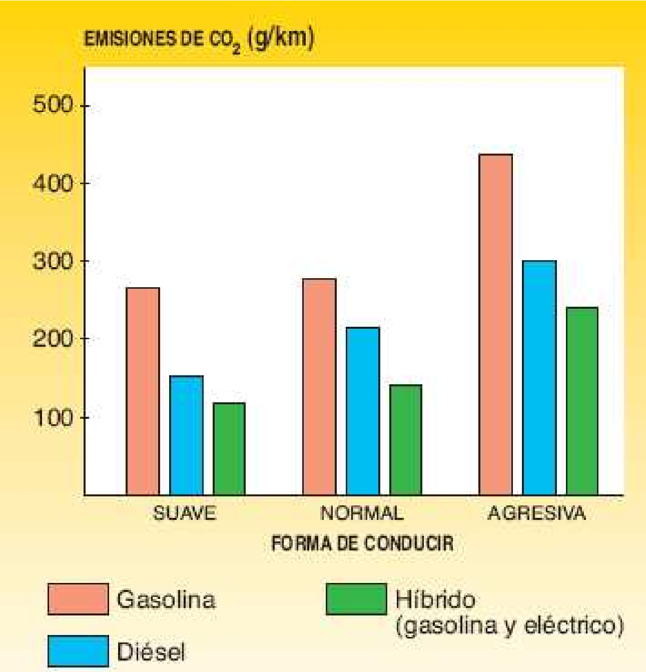
X, 2, 1, X, X, 1, X, 2, X, 2, 1, X, X, 2, 1, X, 2, 1, X, X, 2, 2, 1, X, 2, 1, X, 2, 2, 1

Realiza el recuento y organiza en una tabla las frecuencias (absoluta y relativa) y los porcentajes.

14. La forma de conducir un vehículo influye mucho en el consumo de combustible, en la seguridad y en las emisiones contaminantes. Estas últimas, además de ser nocivas para la salud, influyen en el cambio climático (efecto invernadero).

Aplicando el protocolo de Kyoto, la Unión Europea impone una reducción de los principales gases de efecto invernadero (por ejemplo, para el año 2010 se pretende que las emisiones de CO_2 se hayan reducido a 120 g/Km.).

Se han medido las emisiones de CO_2 en un recorrido urbano con tres coches del mismo tipo, pero que usan distintos carburantes. Observa la gráfica y responde a las cuestiones que se te plantean.



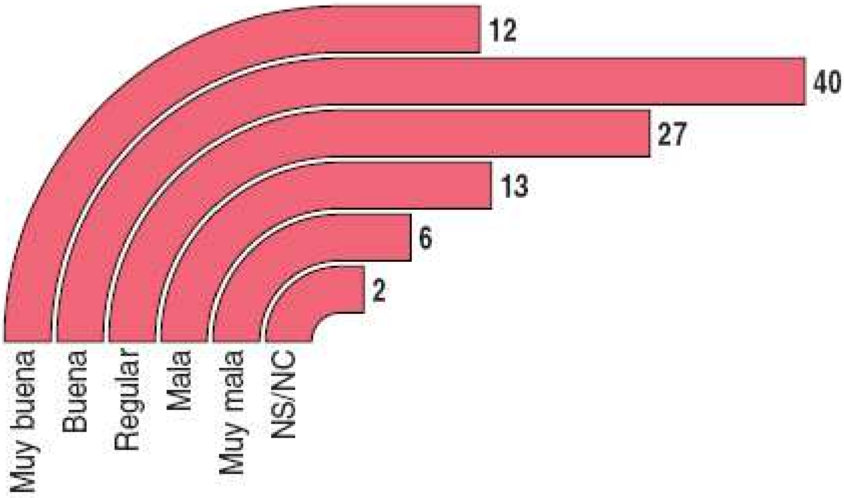
a) ¿Cómo influye la forma de conducir en las emisiones de CO_2?

b) ¿Cómo influye el tipo de carburante en las emisiones de CO_2? (Aparte del CO2, los coches emiten más partículas contaminantes. Por ejemplo, el diésel en las ciudades contamina más, en general, que la gasolina).

c) ¿Alguna de las opciones estudiadas es próxima a la reducción de emisiones de CO_2 que se espera en la Unión Europea para el año 2010? ¿Cuál?

d) ¿Cuál es la opción que más se aleja de las recomendaciones de la Unión Europea para el año 2010?

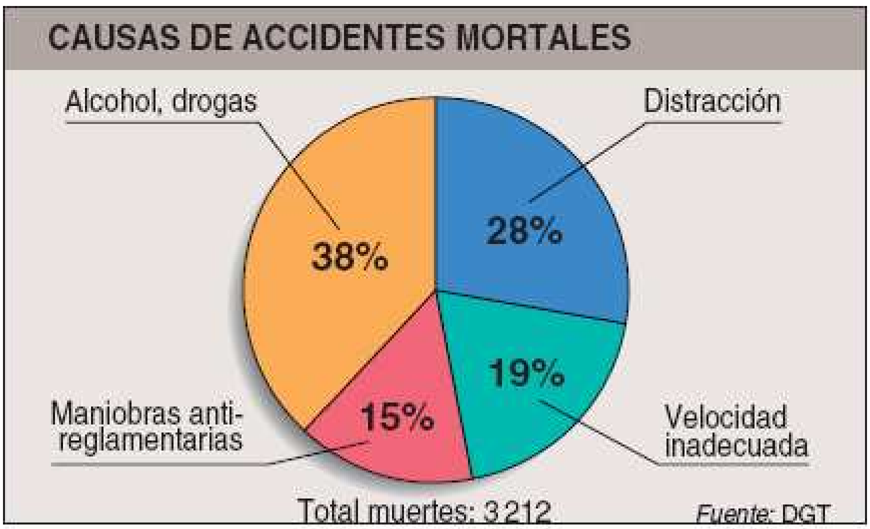
15. Estos son los resultados de una encuesta realizada en una comunidad autónoma sobre la actuación de su presidente:



a) Con los datos del gráfico, haz una tabla de frecuencias y un diagrama de barras verticales.

b) ¿Crees que dan la misma impresión?

16. Un diario publicó la siguiente información:



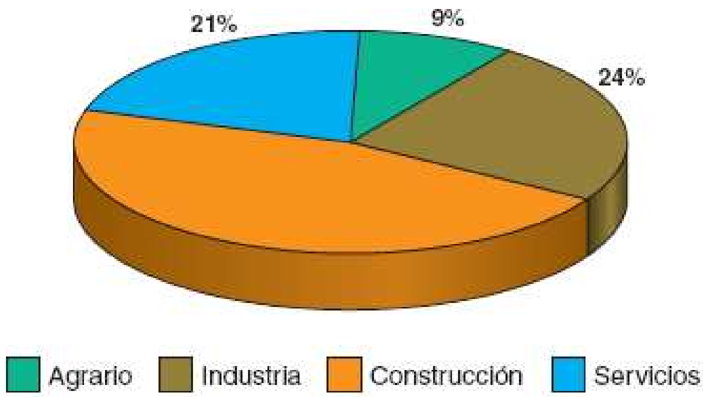
a) ¿Cuántas personas murieron en accidentes cuya causa fue el alcohol o las drogas?

b) El 75% de las distracciones son fruto de la euforia o de la lentitud de reflejos que producen el alcohol y otras drogas. Según esto, ¿qué porcentaje de accidentes está relacionado con el alcohol y las drogas?

17. Un frutero tiene sacos de patatas de 2 Kg., 5 Kg. y 10 Kg. Durante un determinado día ha vendido 10 sacos de los primeros, 5 sacos de los segundos y 2 sacos de los terceros.

a) ¿Cómo se escribirían estos datos de manera estadística?
b) ¿cuáles serán las frecuencias absolutas?
c) ¿Cuáles serán las frecuencias relativas en tanto por uno? ¿Y en tanto por ciento?
d) Organiza estos datos de manera estadística mediante una tabla de frecuencias.
e) Representa las frecuencias absolutas en un diagrama de barras.
f) Dibuja un diagrama de sectores con los porcentajes vendidos.
g) ¿Cuál es el peso medio de los sacos de patatas que ha vendido el frutero ese día? ¿Qué nombre recibe dicho número en Estadística?
h) ¿Qué saco de patatas es el más vendido? ¿Qué nombre recibe ese número en Estadística?

18. En una determinada región se ha hecho un estudio sobre los accidentes mortales producidos en el trabajo, según el sector de actividad. Aquí se muestran los resultados:



a) ¿Cuál es el porcentaje de accidentes mortales producidos en el sector de la construcción?
b) Si hubo 135 accidentes mortales en el sector agrario, ¿cuál fue el número total de accidentes mortales en la región?
c) ¿Cuántos accidentes mortales hubo en cada uno de los sectores?

19. a) ¿Qué tipo de variable representa la siguiente tabla, que nos da las edades a las que comenzaron a sentarse solos un grupo de niños de una guardería infantil?

Meses	5	6	7	8	9	10	11	12
Nº niños	10	23	36	28	14	7	6	1

b) ¿Qué nombre recibe en Estadística la columna de los meses de la tabla? ¿Y la del número de niños?
c) Organiza en una tabla de frecuencias, la frecuencia absoluta, la frecuencia relativa y los porcentajes.
d) Realiza la representación gráfica apropiada de los datos obtenidos.
e) ¿Cuál es el mes, por término medio, en el que se sientan solos los niños en la guardería? ¿Qué nombre recibe en Estadística?
f) ¿En qué mes se sientan más niños solos? ¿Qué nombre recibe este número en Estadística?

20. Se ha realizado una encuesta sobre 25 personas de una empresa, preguntándoles por el número de años que llevan trabajando en ella. Los resultados se indican a continuación:

5, 3, 7, 5, 4, 5, 3, 7, 6, 4, 3, 1, 6, 5, 7, 3, 5, 4, 3, 2, 1, 3, 4, 6, 7

Hallar la media aritmética del número de años de permanencia en la empresa de los trabajadores.

21. Se desea saber el número medio de televisores que hay en los hogares de una población. Para ello se realiza una encuesta en 50 hogares de la ciudad, obteniéndose los siguientes resultados:

Nº de televisores	0	1	2	3	4	5
Nº de personas	1	17	22	5	4	1

a) Determina la media aritmética de la distribución.

b) ¿Qué porcentaje de hogares tiene menos de 3 aparatos de TV?

c) ¿Qué porcentaje de hogares tiene entre 2 y 4 aparatos de TV?

d) Realiza un diagrama de sectores.

22. Hemos consultado, en diferentes comercios, el precio (en euros) de un determinado modelo de impresora, obteniendo los datos siguientes:

146 - 150 - 141 - 143 - 139 - 144 - 133 – 153

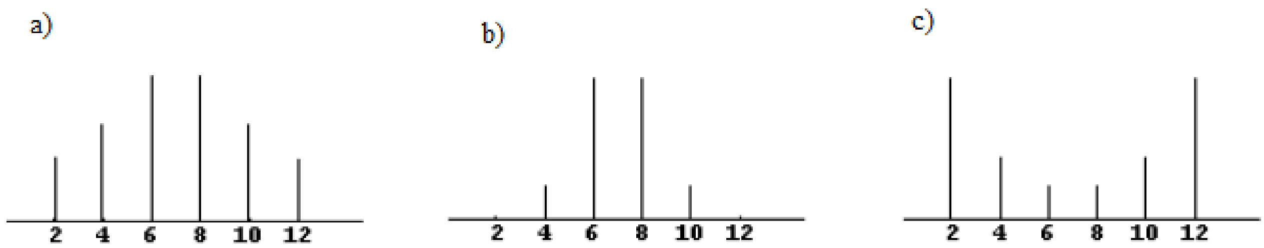
a) Calcula el precio medio.

b) ¿Cuál es la mediana?

c) Halla la desviación media y el recorrido.

d) Halla la desviación típica.

23. Estas tres distribuciones tienen la misma media, ¿cuál es?



Sus desviaciones típicas son 3,8; 1,3 y 2,9. Asocia a cada distribución uno de estos valores.

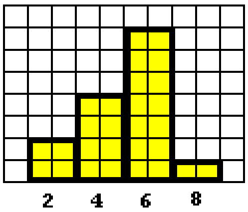
24. En la familia García, el salario mensual del padre es de 950 €, y el salario de la madre, 1600 €. En la familia Gómez, el padre gana 1800 € al mes, y la madre 750 €.

a) ¿Cuál es el sueldo medio de cada familia?

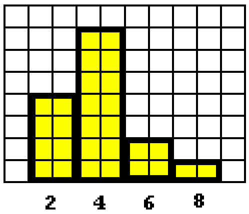
b) ¿En cuál de ellas es mayor la dispersión? ¿Cuál es el rango en cada familia**?**

25. Estas gráficas y estos parámetros corresponden a las notas de tres grupos A, B y C en un test. ¿Qué gráfica corresponde a cada grupo?

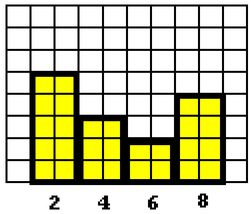
I



II

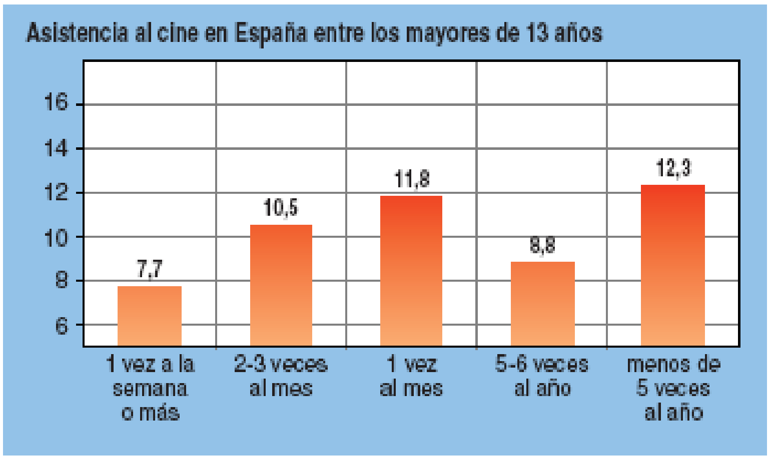


III



	A	B	C
Media	4	5	4,7
Desviación típica	1,7	1,6	2,5

26. Observa el siguiente gráfico donde se refleja la asistencia al cine entre los mayores de 13 años en España.



a) Observa que la primera barra es menor que la mitad de la última. ¿Significa esto que los que van al cine menos de 5 veces al año son más del doble que los que van una vez a la semana o más?

b) Repite la gráfica tomando la escala vertical desde 0.

c) ¿Qué porcentaje de españoles no va al cine nunca o casi nunca?

27. Contando el número de erratas por página en un libro concreto, hemos obtenido los datos siguientes:

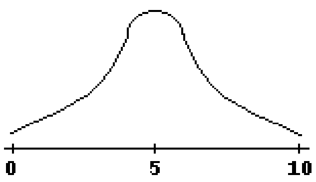
Nº de erratas	0	1	2	3	4	5
Nº de páginas	50	40	16	9	3	2

a) Halla la media y la desviación típica.

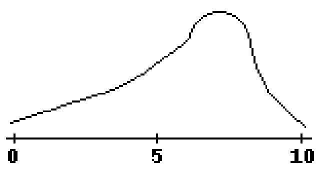
b) ¿Cuál es la moda?

28. Se ha hecho un mismo examen en dos clases A y B de 40 alumnos y alumnas cada una. Las notas medias de cada clase y sus desviaciones típicas son: $\overline{X}_A = 6$; $\sigma_A = 1$ y $\overline{X}_B = 6$; $\sigma_B = 3$. Asigna una de las gráficas siguientes a la clase A y otra a la clase B:

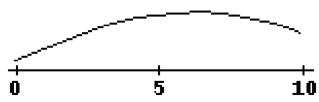
I



II



III



a) En una de las clases hay 15 suspensos y 6 sobresalientes, mientas que en la otra hay 5 suspensos y 1 sobresaliente. ¿Cuál es la clase A y cuál la clase B?

b) Si Alicia aspira a sobresaliente y su amigo Ignacio sólo aspira a aprobar, ¿qué clase te parece más adecuada para cada uno?

29. Los puntos conseguidos por Teresa y por Rosa en una semana de entrenamiento, jugando al baloncesto, han sido los siguientes:

Teresa	16	25	20	24	22	29	18
Rosa	23	24	22	25	21	20	19

Halla la media de cada una de las dos. ¿Cuál es más regular de las dos?

30. En una empresa hay 3 directivos, 50 operarios y 8 vendedores. Los sueldos mensuales, en euros, de cada categoría son los siguientes: directivos, 4.000; operarios, 1.400; vendedores, 2.000.

a) Halla la moda, la mediana y la media de los sueldos.
b) ¿Qué medida es más representativa del promedio?

31. A la pregunta, “¿cuántas personas forman tu hogar familiar?”, 40 personas respondieron esto:

5 5 4 7 4 5 5 5 3 4 6 4 6 5 6 4 6 5 5 5

5 4 7 5 6 5 5 4 3 5 3 5 6 7 4 5 4 3 5 6

a) Haz la tabla de frecuencias y el diagrama correspondiente.
b) Calcula la media, la mediana, la moda y la desviación típica.

32. De una encuesta sobre la labor de un alcalde, se obtuvieron los siguientes datos:

Muy mala →22 Mala →27 Aceptable →17 Buena →19 Muy buena → 15

a) ¿Qué porcentaje opina que la labor ha sido mala o muy mala?
b) ¿Qué porcentaje aprueba la labor del alcalde?
c) Halla la moda y la mediana y di cuál de esos dos parámetros te parece que representa mejor la opinión de la mayoría.

33. Ante la preocupación de que los pueblos empiecen a desaparecer, se ha hecho una investigación para calcular la edad media de los habitantes de varios pueblos de una Comunidad Autónoma. Tomemos como ejemplo un pueblo donde viven 94 personas. Las edades vienen indicadas en la siguiente tabla:

EDAD	22	23	27	33	40	42	60	62	63	65	70	75	80	85	90	92
Nº DE PERSONAS	5	1	5	2	4	4	3	8	8	5	13	11	10	10	5	4

a) ¿Cuántas personas hay menores de 23 años?
b) ¿Cuántas personas hay mayores de 80 años?
c) ¿Cuál es la edad de los habitantes del pueblo?
d) ¿Qué porcentaje de personas del pueblo tiene una edad superior a la media?
e) ¿Cuál es la edad más común (moda de las edades)?
f) ¿Cuál es la mediana?
g) ¿Cuál es la diferencia entre la mayor y la menor edad de los habitantes del pueblo?

34. El número de faltas de ortografía que cometieron un grupo de estudiantes en un dictado fue:

0	3	1	2	0	2	1	3	0	4
0	1	1	4	3	5	3	2	4	1
5	0	2	1	0	0	0	0	2	1
2	1	0	0	3	0	5	3	2	1

a) Di cuál es la variable y de qué tipo es.
b) Haz una tabla de frecuencias y representa los datos en un diagrama adecuado.
c) Calcula la media y la desviación típica.

35. ¿Cuál es la media de la siguiente distribución?

Modalidad	Guapo	Agraciado	Feo
Frecuencia	10	18	8

36. En una encuesta realizada a 20 personas que esperan para el examen teórico de conducir, se les pregunta por el número de veces que han suspendido anteriormente dicha prueba. Las respuestas han sido las siguientes:

0	1	1	1	2	0	0	2	0	1
3	1	5	2	0	1	4	4	2	1

a) Elabora una tabla de frecuencias.
b) Representa la distribución en un gráfico adecuado.
c) Calcula la mediana y la moda.
d) ¿Cuál es la desviación típica?

Unidad 4: Probabilidad.

1. SUCESOS ALEATORIOS.

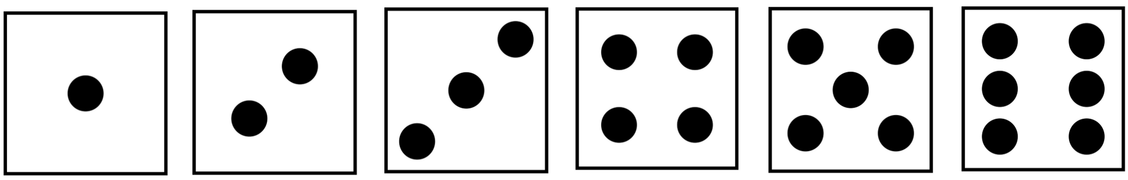
En nuestra vida diaria nos encontramos con muchos acontecimientos de los que no podríamos predecir si ocurrirán o no, como por ejemplo si me tocará la lotería, el número que saldrá al lanzar un dado, hacer una diana en el juego de los dardos, el tiempo que hará mañana…

Se llaman **sucesos aleatorios** a aquellos acontecimientos en cuya realización influye el azar.

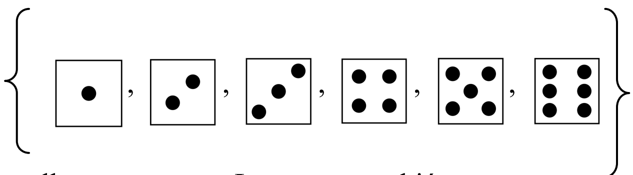
Para estudiar el azar y sus propiedades, podemos realizar **experiencias aleatorias**, es decir, experimentos cuyos resultados dependen del azar.

Por ejemplo, vamos a estudiar la experiencia aleatoria consistente en lanzar un dado y observar lo que sale. Cada uno de los resultados que pueden obtenerse al realizar una experiencia aleatoria se llama **caso**.

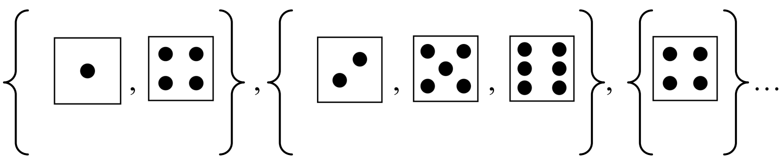
Los posibles casos de lanzar un dado son:



El conjunto de todos los posibles casos se llama **espacio muestral**, y lo designaremos por **E**.

En el dado, el espacio muestral es E = 

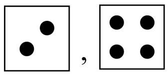
Los subconjuntos del espacio muestral se llaman **sucesos**. Los casos también son sucesos, se laman **sucesos elementales.** Algunos sucesos de la experiencia lanzar un dado son:



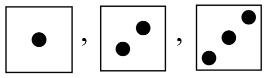
Hay muchos sucesos más en esta experiencia.

El espacio muestral es el suceso total o **suceso seguro**.

Dos **sucesos** son **compatibles** cuando pueden verificarse simultáneamente. Por ejemplo:

 y resultados pares son sucesos compatibles.

Dos **sucesos** son **incompatibles** cuando no pueden verificarse simultáneamente. Por ejemplo:

 y números mayores que 4 son sucesos incompatibles.

Veamos otro ejemplo. Vamos a considerar el experimento aleatorio “extraer una carta de la baraja española y anotar lo que sale”.

El espacio muestral consta de 40 casos: cada una de las cartas de la baraja española.

Algunos sucesos son:

 = Sacar un As

 = Sacar una figura

Estos dos sucesos, “sacar un as” y “sacar una figura”, son sucesos incompatibles.

Los sucesos:

 = Sacar un As y

 = Sacar copas, son incompatibles.

2. PROBABILIDAD DE UN SUCESO.

El azar no es tan caprichoso como parece. Los sucesos que dependen del azar (sucesos aleatorios) ocurren con mayor o menor facilidad, es decir, con mayor o menor **probabilidad**. Y esta probabilidad se puede medir.

La **probabilidad de un suceso aleatorio** es el grado de confianza que podemos tener en que ese suceso ocurra. Se expresa mediante un número comprendido entre 0 y 1.

Para designar la probabilidad de un suceso, A, escribimos P (A).

- Cuanto más se aproxime a 0 el valor de P (A), el suceso es menos probable.
- Cuanto más se aproxime a 1 el valor de P (A), el suceso es más probable.
- Si P (A) = 1, el suceso es seguro.
- Si P (A) = 0, el suceso es imposible.

Por ejemplo, si decimos que la probabilidad de un suceso es $P(A)=\frac{1}{3}$, queremos decir que el suceso ocurre, por término medio, una de cada tres veces que se realiza la experiencia.

Hay dos formas de medir la probabilidad de un suceso:

- Si la experiencia es regular, se puede evaluar la probabilidad sin necesidad de experimentar. Se hará asignando la misma probabilidad a todos los casos que puedan darse.

Por ejemplo, sabemos que, por ser igual por ambos lados, al lanzar una moneda, es igual de probable que salga cara o que salga cruz.

Por eso, podemos asignar probabilidades sin necesidad de experimentar, y decimos que: $P(\text{Cara})=\frac{1}{2}$ y $P(\text{Cruz})=\frac{1}{2}$.

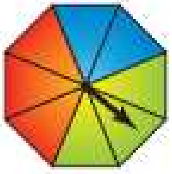
- Si la experiencia es irregular, para asignar probabilidades será necesario experimentar.

  Por ejemplo, si un jugador de baloncesto va a tirar a canasta, ignoramos cuál es la probabilidad de que enceste o falle el lanzamiento. ¿Cómo evaluar la probabilidad de que el jugador acierte en su tirada? Es imposible hacerlo si no experimentamos. Es decir, sólo la experiencia nos puede informar sobre la probabilidad que tiene el jugador de encestar o no.

  Supongamos que lo hemos estado observando en sus entrenamientos y hemos contado 110 canastas y 35 fallos. Podemos entonces asignar la siguiente probabilidad: $P(\text{Encestar})=\frac{35}{110}$.

3. LEY DE LAPLACE.

Imaginemos que tenemos la siguiente ruleta y hacemos girar la aguja:

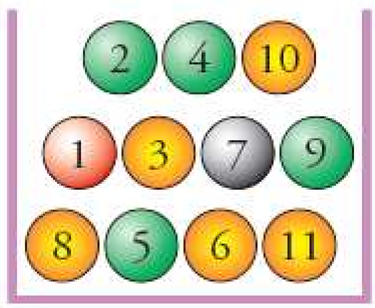


El color azul saldrá dos veces de cada ocho, luego, $P(\text{azul}) = \frac{2}{8}$

El color verde saldrá tres veces de cada ocho, luego, $P(\text{verde}) = \frac{3}{8}$

El color naranja saldrá tres veces de cada ocho, luego, $P(\text{naranja}) = \frac{3}{8}$

Supongamos, ahora que tenemos, la siguiente urna con bolas de colores numeradas del 1 al 11. Sacamos una bola de la urna:



El color verde saldrá cuatro de cada once veces, luego $P(\text{verde}) = \frac{4}{11}$.
Una bola con número par saldrá cinco de cada once veces, luego $P(\text{par}) = \frac{5}{11}$.

¿Qué observas? ¿Serías capaz de generalizar los resultados obtenidos en los experimentos anteriores?

Realizamos una experiencia aleatoria con un instrumento regular.

El espacio muestral tiene *n* elementos (casos).

La probabilidad de cada caso es $\frac{1}{n}$.

A es un suceso que consta de *k* elementos. Entonces, la probabilidad de A es: $P(A) = \frac{k}{n}$.

Esto se expresa del siguiente modo:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables a A}}{\text{número total de casos posibles}} \leftarrow \text{ LEY DE LAPLACE}$$

ACTIVIDADES.

1. Escribe el espacio muestral asociado a cada uno de estos experimentos aleatorios.

   a) Se saca una carta de la baraja española y se anota el palo.
   b) Extraemos una bola de una caja que tiene bolas verdes, rojas, amarillas y azules.
   c) Se coge una bola de una urna que contiene bolas numeradas del 1 al 10.
   d) Tomamos un huevo de una nevera donde hay huevos cocidos y crudos.
   e) Se extrae una carta de la baraja y se anota si es figura o no.

2. En el experimento aleatorio que consiste en extraer una carta de la baraja española, define el espacio muestral y estos sucesos.

   a) Sacar rey.
   b) Sacar carta con número par.
   c) Sacar espadas.
   d) No sacar oros.
   e) Sacar figura.

3. En la siguiente experiencia "extraer una carta de una baraja española", determina si los siguientes pares de sucesos son compatibles o incompatibles:

a) Sacar oros.
Sacar un as.

b) Sacar una figura.
Sacar espadas.

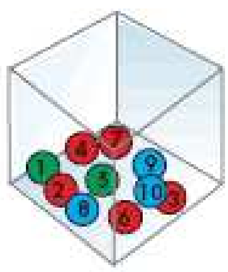
c) Sacar un rey.
Sacar un nº menor que 3.

4. En una urna hay 2 bolas negras, 4 rojas y 3 verdes. Se sacan, simultáneamente dos bolas. ¿Cuál es el espacio muestral asociado a esta experiencia?

5. Tenemos muchas bolas de cada uno de los siguientes colores: negro (N), rojo (R), verde (V) y azul (A), y una gran caja vacía. Echamos en la caja 1 R, 10 V y el resto A (muchas más de 10). Removemos y extraemos una al azar. Asocia con flechas:

P (R)	Imposible
P (V)	Muy poco probable
P (A)	Poco probable
P (N)	Muy probable

6. Sacamos una bola de esta urna y anotamos su número.



   a) Describe el espacio muestral. ¿Cuántos casos tiene?
   b) Describe los siguientes sucesos: sacar una bola roja, sacar una bola azul, sacar una bola verde, sacar una bola con un número par, sacar una bola con un número impar.
   c) Calcula la probabilidad de cada uno de los sucesos anteriores.
   d) ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola blanca?
   e) ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola con un número menor que 15?

7. En una baraja española de 40 cartas se extrae una carta. Halla la probabilidad de que:

a) Sea de oros.
b) Sea el rey de copas.
c) Sea un caballo.
d) No sea un as.

8. El Consejo Escolar de un instituto acuerda que para llevar a cabo una actividad extraescolar es necesaria la participación de, al menos, el 60% del alumnado. Se proyecta una excursión. De todos los alumnos del centro 291 quieren ir a la excursión, 166 no quieren y 43 dudan.

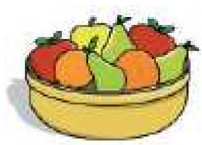
a) ¿Se puede realizar la excursión?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir una alumno al azar, éste sea de los que están indecisos?

9. En una urna hay 3 bolas blancas y 2 verdes. Si se extrae una bola al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea verde? La bola extraída se vuelve a meter en la urna y se repite la prueba, ¿cuál es la probabilidad de sacar bola verde otra vez?

10. En un examen para unas oposiciones hay 80 temas, de los cuales se elige uno al azar. Si un opositor se sabe 60 de los temas, halla la probabilidad de que:

a) Le toque uno de los que sabe.
b) Le toque uno de los que no sabe.

11. Extraemos una pieza de fruta de la siguiente cesta. ¿Cuál es la probabilidad obtener una pera?



12. Se lanzan dos dados al aire y se anota la suma de puntos obtenida. Calcular:

a) La probabilidad de obtener 7.
b) La probabilidad de que el número obtenido sea par.
c) La probabilidad de que el número obtenido sea múltiplo de tres.

13. En un colegio hay 990 alumnos matriculados, de los cuales 510 son niñas. Si elegimos al azar un estudiante de ese colegio, ¿cuál es la probabilidad de que sea niño?

14. En una clase hay 10 alumnas rubias, 20 morenas, cinco alumnos rubios y 10 morenos. Un día asisten 44 alumnos, encontrar la probabilidad de que el alumno que falta:

a) Sea hombre.
b) Sea una mujer morena.
c) Sea un hombre o una mujer.
d) Sea pelirroja.

15. Extraemos una ficha de dominó. Halla la probabilidad de que:

a) La suma de puntos sea menor que 4.
b) La suma de puntos sea múltiplo de 3.
c) Sea una ficha "doble".

16. Para un examen de Geografía, hay que saber situar sobre un mapa mudo las 17 comunidades autónomas de España. Un alumno sólo sabe situar 10 de ellas.

    a) Si en el examen le piden situar una, ¿cuál es la probabilidad de que sea una de las que sabe?
    b) Supongamos que le piden que sitúe una de las que no sabe y, en vez de no contestar, lo hace a boleo. ¿Cuál es la probabilidad de que acierte?

17. Se hace girar la flecha y se observa sobre qué número se detiene. Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos:

    a) Obtener número par.
    b) Obtener número impar.
    c) Obtener 5 o más.
    d) Que no salga el 7.

18. En la lotería primitiva, calcula la probabilidad de que la primera bola extraída:

    a) Sea un número de una sola cifra.
    b) Sea un número múltiplo de 7.
    c) Sea un número mayor que 25.

19. Elena tiene en su armario 2 pantalones de colores azul y verde respectivamente, y 3 jerséis de colores blanco, azul y verde. ¿Si escoge al azar unos pantalones y un jersey, ¿cuál será el espacio muestral?

20. En una estantería de un supermercado hay 200 botellas de idéntica forma, pero unas contienen zumo de piña y otras de melocotón. Una persona, con los ojos tapados, coge una botella. En el supuesto de que hay tantas de un tipo como de otro:

    a) ¿Hay la misma probabilidad de elegir zumo de piña que de melocotón?
    b) ¿Y si consideramos que hay tres botellas de zumo de piña por cada una de melocotón?

21. En una granja hay ovejas de dos razas, A y B. Se desconoce el porcentaje de cada raza, pero al apartar aleatoriamente 58 animales, resultan 42 de raza B y el resto de raza A. ¿Qué probabilidad asignarías al suceso apartar una oveja de raza A?

22. En un restaurante de comida rápida tienen 4 tipos de bocadillos diferentes, B1, B2, B3 y B4, y tres tipos de refrescos, naranja, limón y cola, y confeccionan menús que constan de un bocadillo y un refresco.

    a) Calcula la probabilidad de que una persona elija un menú que tiene limón.
    b) Calcula la probabilidad de que una persona elija un menú que tenga un bocadillo del tipo B2 o B3.

23. Tenemos dos dados A y B, ambos trucados. En el dado A hay tres "1" y tres "2" y en el dado B hay dos "1" y cuatro "2". Se elige un dado al azar y se tira. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 1?