1. EXPRESIONES ALGEBRAICAS. CLASIFICACIÓN

Tanto en matemáticas, como en física, en economía, en química, ... es corriente el uso de expresiones en las que intervienen números y letras (llamadas también *variables o incógnitas*) relacionadas entre si mediante las operaciones aritméticas usuales: suma, resta, producto, división, potenciación y radicación.

Tales expresiones se llaman *algebraicas.* Son ejemplo de expresiones *algebraicas*:

$$3x^2 + 4y - 7 \quad ; \quad 3x^2 + 2x + 3 \quad ; \quad \sqrt{27a^3b}$$

Las expresiones algebraicas se clasifican en:

Enteras*:* Si no existe ninguna letra como denominador $\frac{2}{3}x^4y \quad ; \quad 3x^3 + 6a$

Fraccionarias: No enteras: $\frac{2x^2y}{x+y} \quad ; \quad \frac{3a+6b}{2b} \quad ; \quad x + \frac{4}{y}$

Racionales*.* Si no existe ninguna letra bajo el signó radical: $3x + \frac{2y}{7} \quad ; \quad \sqrt{3}a + b$

Irracionales: No racionales. Las variables están sometidas a radicación: $\sqrt{3xy} \quad ; \quad 3x + \sqrt{7y^3}$

2. VALOR NUMÉRICO DE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA

Si las letras que figuran en una expresión algebraica se sustituyen por números determinados, la expresión algebraica se convierte en una expresión aritmética cuyo valor se podrá calcular efectuando las operaciones indicadas. Obtendremos así el valor numérico de la expresión algebraica para los valores dados a las letras.

Ejemplos:

El valor numérico de $3a + 5b$ para *a*=-2, *b*=4 es $3 \cdot (-2) + 5 \cdot 4 = -6 + 20 = 14$

El valor numérico de $3xy + 3\sqrt{xy^2}$ para *x*=9, *y*=-1 es

$$3 \cdot 9 \cdot (-1) + 3 \cdot \sqrt{9 \cdot (-1)^2} = -27 + 3 \cdot \sqrt{9} = -27 + 3 \cdot 3 = -27 + 9 = -18 .$$

El valor numérico de $3a + 5b$ para *a*=1/2, *b*=-2 es $3 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot (-2) = \frac{3}{2} - 10 = \frac{-17}{2}$.

Notad que, como hemos visto, una misma expresión algebraica tiene distintos valores numéricos dependiendo del valor asignado a las variables.

3. MONOMIOS

Se llama monomio a una expresión algebraica racional entera que consta de un solo sumando.

Son monomios: $-\frac{2}{3}a^2b$; $3x$; 3 ; x ; $\sqrt{3}xy^3$.

No son monomios: $\sqrt{3a^3b}$; $\frac{2}{3}ab+b$; $\frac{3x}{y}$.

Todo monomio consta, de dos partes:

Coeficiente*:* el número del monomio.

Parte literal : las letras con sus exponentes.

Así:

- en el monomio $-\frac{2}{3}a^3b$ el coeficiente es $-\frac{2}{3}$ y la parte literal a^3b.
- en $3x$, el coeficiente es 3 y la parte literal x.
- en x, el coeficiente es 1 y la parte literal x.
- En 3, el coeficiente es 3 y la parte literal x^0 (recordar que todo número elevado a 0 es igual a la unidad, y por tanto $3 = 3x^0$).

Se llaman ***monomios semejantes*** aquellos que tienen la misma parte literal.

Son semejantes los monomios: $3x^2y$; $-\frac{7}{3}x^2y$; $\sqrt{3}x^2y$

No son semejantes: $3xy$; $-\frac{7}{3}xy^2$; $\sqrt{3}x^2y$

Se llama ***grado* de un** monomio respecto a una variable al exponente de dicha variable; y se llama ***grado del monomio*** a la suma de los exponentes de las variables que forman el monomio.

Así:

- el grado de $-\frac{7}{3}a^3b$ respecto a a es 3, respecto a b es 1, y el grado total del monomio es 4.
- el grado de $3x$ es 1.
- el grado de 3 es 0 (recordar que $3 = 3x^0$).

3.1. OPERACIONES CON MONOMIOS

Es preciso recordar previamente las reglas de operaciones con potencias.

$\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$ $\boxed{(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$ $\boxed{\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$ $\boxed{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}}$

$\boxed{a^0 = 1}$ $\boxed{a^1 = a}$ $\boxed{a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}}$

SUMA Y RESTA DE MONOMIOS

Sólo se pueden sumar y restar monomios que sean semejantes. Para hacerlo se suman (o restan) los coeficientes dejando la misma parte literal.

Ejemplo:

$$3a^3b + 4a^3b - \frac{2}{3}a^3b = (3 + 4 - \frac{2}{3}) \cdot a^3b = \frac{19}{3}a^3b$$

PRODUCTO DE MONOMIOS

Se multiplican los coeficientes y las partes literales, teniendo en cuenta la regla de los signos y las operaciones con potencias (producto de potencias de la misma base).

Ejemplos:

1. $(3a^3b)\left(\frac{4}{5}ab^3c\right) = \frac{12}{5}a^4b^4c$

2. $(-2xy)\ (-3xy^2) = +6x^2y^3$

3. $(3x)\ (-2x^2)\ (4x^3) = -24x^6$

DIVISIÓN DE MONOMIOS

Se dividen los coeficientes y las partes literales, teniendo también en cuenta la regla de los signos y las operaciones con potencias (cociente de potencias de la misma base y potencias de exponente negativo).

Ejemplos:

1. $(3a^3b) : \left(\frac{4}{5}ab\right) = \frac{15}{4}a^2$

2. $(3x^3) : (-6x) = -\frac{3}{6}x^2 = -\frac{1}{2}x^2$

3. $(2ab^4) : (3a^2b^2c) = \dfrac{2}{3}a^{-1}b^2c^{-1} = \dfrac{2b^2}{3ac}$

POTENCIA DE UN MONOMIO

Para hacerlo tendremos en cuenta la regla de los signos, la potencia de una potencia y las potencias de un producto y de un cociente.

Ej.:

$(-2a^3b^2c)^2 = +4a^6b^4c^2$

$$\left(\frac{2}{5}ab^3c\right)^3 = \left(\frac{2}{5}\right)^3 a^3b^9c^3 = \frac{8}{125}a^3b^9c^3$$

4. POLINOMIOS

Podemos definir un polinomio como la suma algebraica de monomios.

$3x^2y + 5x - \frac{2}{3}xy + \sqrt{2}y^3$ es un polinomio.

Cada monomio se llama ***término*** del polinomio; así un monomio es un polinomio de un solo término; si el polinomio tiene dos *términos* se llama ***binomio,*** si tiene tres términos*,* ***trinomio,*** y si mas de tres se llama **polinomio**, sin nombres específicos.

$3x^2yz - \frac{4}{5}yz^2$ es un binomio; $4x^3 - 3x - 2y^2$ es un trinomio

Se llama ***grado del polinomio*** al mayor de los grados de los términos que lo forman.

El polinomio $3x^2yz - \frac{4}{5}yz^2$ es de grado 4; $4x^3 - 3x - 2y^2$ es de grado 3.

Se llama ***polinomio homogéneo*** a aquel cuyos términos son todos del mismo grado.

El polinomio $3x^2y - \frac{2}{3}x^3 + 4y^2x$ es homogéneo.

Un polinomio se dice que está ***ordenado*** **respecto a una variable** cuando el exponente de dicha incógnita en cada término es siempre mayor (***ordenado decrecientemente***) o menor (***ordenado crecientemente***) que en el siguiente término.

El polinomio $3a^4+6a^2b-3ab^3+b^5$ está ordenado crecientemente respecto a "*a*" y decrecientemente respecto a "*b*".

Un polinomio se dice *completo* respecto a una variable cuando posee todos los grados de dicha variable, desde el grado 0 (*término independiente*) hasta el mayor.

El polinomio $3a^4+6a^2b-3ab^3+b^5$ es incompleto en a y en b.

El polinomio $3+2x-3x^2+4x^3$ es completo y está ordenado crecientemente respecto a *x*.

El polinomio en *x*, $3x^3 - 2x + 4x^4 - 7 - \frac{2}{3}x^2$ es completo y desordenado.

Usualmente trabajaremos con polinomios en una sola variable, designada por *x*, y sólo para algunas operaciones usaremos polinomios con más de una variable.

4.1. SUMA Y RESTA DE POLINOMIOS

SUMA

Para sumar polinomios se suman los monomios semejantes que existan.

Ejemplo:

$$\left\{3x^3 - 2xy^2 + 3y^3 - 7y^2\right\} + \left\{-2x - 2x^3 + 7y^2 - 3x^2y + 12y^3\right\} =$$
$$= 3x^3 - 2xy^2 + 3y^3 - 7y^2 - 2x - 2x^3 + 7y^2 - 3x^2y + 12y^3 = x^3 - 2xy^2 + 15y^3 - 2x - 3x^2y$$

La operación es notablemente más sencilla con polinomios en x:

$$(2-3x+4x^2-7x^4+18x^5) + (3-\frac{1}{3}x^2-3x^3+8x^4-\frac{2}{5}x^6) =$$

$$= 2-3x+4x^2-7x^4+18x^5+3-\frac{1}{3}x^2-3x^3+8x^4-\frac{2}{5}x^6 = 5-3x+\frac{11}{3}x^2-3x^3+x^4+18x^5-\frac{2}{5}x^6$$

RESTA

Para restar se hace lo misma que para sumar teniendo en cuenta que un signo menos delante de un paréntesis cambia todos los signos de su interior.

$$(2-3x+4x^2-7x^4+18x^5) - (3-\frac{1}{3}x^2-3x^3+8x^4-\frac{2}{5}x^6) =$$

$$= 2-3x+4x^2-7x^4+18x^5-3+\frac{1}{3}x^2+3x^3-8x^4+\frac{2}{5}x^6 = -1-3x+\frac{13}{3}x^2+3x^3-15x^4+18x^5+\frac{2}{5}x^6$$

4.2. PRODUCTO DE POLINOMIOS

PRODUCTO DE UN POLINOMIO POR UN MONOMIO

Para multiplicar un polinomio por un monomio se multiplican cada uno de los términos del polinomio por el monomio.

Ejemplo:

$$\left(2x^3 + 5xy - 7xy^2\right)\cdot\left(-2xy\right) = -4x^4y - 10x^2y^2 + 14x^2y^3$$

$$\left(3 + 2x - \frac{3}{5}x^2 + 6x^4\right)\cdot\left(4x^2\right) = 12x^2 + 8x^3 - \frac{12}{5}x^4 + 24x^6$$

PRODUCTO DE POLINOMIOS

Para multiplicar, un polinomio *P(x)* por otro *Q(x)* se multiplican cada uno de los términos del polinomio *P(x)* por cada uno de los monomios de *Q(x)*. Los polinomios resultantes se escriben unos debajo de otros, de forma que estén en la misma columna los monomios que hayan resultado semejantes. Se suman finalmente los productos parciales obtenidos y obtenemos el polinomio producto final *P(x)* • *Q(x)* . Normalmente, como hemos dicho, se trabaja con polinomios en *x*.

Ejemplo: Multiplicar $\left(4x^3-3x^2+2x+1\right)\cdot\left(2x^2+3\right)$

$$\begin{array}{rl}
4x^3-3x^2+2x+1 & \rightarrow P(x)\\
2x^2+3 & \rightarrow Q)(x)\\
\hline
12x^3-9x^2+6x+3 & \\
8x^5-6x^4+4x^3+2x^2 & \\
\hline
8x^5-6x^4+16x^3-7x^2+6x+3 & \rightarrow P(x)\cdot Q(x)
\end{array}$$

Notad que el grado del polinomio producto es igual a la suma de los grados de los polinomios factores:

$$\boxed{\text{grado } [P(x)\cdot Q(x)] = \text{grado } P(x) + \text{grado } Q(x)}$$

En el ejemplo anterior el grado del polinomio $\boxed{8x^5-6x^4+16x^3-7x^2+6x+3}$ es 5, que es suma de los grados de los polinomios *P(x)* y *Q(x)*, que son 3 y 2 respectivamente.

DIVISIÓN DE POLINOMIOS:

Dividir un polinomio *D(x)* (*dividendo*) entre otro polinomio *d(x)* (*divisor*) es encontrar un tercer polinomio *c(x)* (*cociente*) tal que:

$$\boxed{D(x)=d(x)\cdot c(x)}$$

No siempre es posible encontrar un polinomio cociente que multiplicado por el polinomio divisor nos de el dividendo. Cuando ello es posible se dice que la división es *exacta o entera* y el polinomio *D(x)* se dice que es múltiplo de *d(x)* y de *c(x)*.

Pero si no es posible la división es *inexacta*, existe un polinomio *r(x)* (*resto*), de grado siempre menor que el divisor *d(x)* y tendremos:

$$\boxed{D(x)=d(x)\cdot c(x)+r(x)}$$

Ejemplo:

$$\frac{\left(4x^2+2x\right)}{2x}=2x+1 \quad\Leftrightarrow\quad \left(2x+1\right)\cdot 2x=4x^2+2x$$

Siendo:

$$D(x) = 4x^2 + 2x \qquad d(x) = 2x \qquad c(x) = 2x + 1$$

Entonces:

$$\frac{D(x)}{d(x)} = c(x) \quad \Leftrightarrow \quad c(x) \cdot d(x) = D(x)$$

En este ejemplo la división es exacta, por lo que no hay resto.

DIVISIÓN DE UN POLINOMIO POR UN MONOMIO

Se divide cada término del polinomio dividendo por el monomio o divisor. Es necesario que el polinomio dividendo esté ordenado decrecientemente.

La división se acaba cuando, se obtiene resto cero, ó cuando se llega a un dividendo parcial de grado menor que el divisor.

Veamos dos ejemplos donde mostramos la disposición práctica de los cálculos:

$$\begin{array}{l|l}
8x^4 + 6x^3 + 4x + 10 & 2 \\ \cline{2-2}
-8x^4 & 4x^3 - 3x^2 + 2 \\ \cline{1-1}
\quad -6x^3 & \\
\quad +6x^3 & \\ \cline{1-1}
\qquad 4x & \\
\qquad -4x & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 10 \leftarrow \text{resto.} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
6x^5 - 7x^3 + 12x^2 + \frac{3}{5}x & 2x^2 \\ \cline{2-2}
-6x^5 & 3x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 6 \\ \cline{1-1}
\quad -7x^3 & \\
\quad +7x^3 & \\ \cline{1-1}
\qquad 12x^2 & \\
\qquad -12x^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad \frac{3}{5}x \leftarrow \text{resto.} &
\end{array}$$

DIVISIÓN DE UN POLINOMIO POR UN POLINOMIO

Lo veremos sobre un ejemplo:

1°. Ordenaremos en sentido decreciente dividendo y divisor. Si el dividendo no es completo dejaremos huecos en los términos que falten.

$$\begin{array}{l|l}
8x^5 + 12x^4 \qquad - 6x^2 + 10x + 8 & x^2 + 2x - 2 \\ \cline{2-2}
\end{array}$$

2°. Dividimos el primer término del dividendo entre el primer término del divisor. Luego multiplicamos el término del cociente así obtenido por todo el divisor y restamos el producto resultante del dividendo, con lo cual tenemos el primer dividendo parcial.

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
8x^5 & +12x^4 & & -6x^2 & +10x & +8 & & x^2+2x-2 \\ \cline{8-8}
\underline{-8x^5} & \underline{-16x^4} & \underline{+16x^3} & & & & & 8x^3 \\
 & -4x^4 & +16x^3 & -6x^2 & +10x & +8 & &
\end{array}
$$

3°. Se realiza con este dividendo parcial las mismas operaciones y seguimos así hasta obtener resto cero o hasta llegar a un dividendo parcial de grado menor que el divisor.

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
8x^5 & +12x^4 & & -6x^2 & +10x & +8 & x^2+2x-2 \\ \cline{7-7}
\underline{-8x^5} & \underline{+12x^4} & \underline{+16x^3} & & & & 8x^3-4x^2+24x-62 \\
 & -4x^4 & +16x^3 & -6x^2 & +10x & +8 & \\
 & \underline{+4x^4} & \underline{+\ 8x^3} & \underline{-8x^2} & & & \\
 & & +24x^3 & -14x^2 & +10x & +8 & \\
 & & \underline{-24x^3} & \underline{-48x^2} & \underline{+48x} & & \\
 & & & -62x^2 & +58x & +8 & \\
 & & & \underline{+62x^2} & \underline{+124x} & \underline{-124} & \\
 & & & & +182x & -116 & \leftarrow \text{resto}
\end{array}
$$

Notad que se cumple *D* (*x*) = *d* (*x*) · *c* (*x*) + *r* (*x*) (lo podéis comprobar); y que el grado del cociente es el grado del dividendo menos el grado del divisor.

$$\boxed{\text{Grado c(x) = grado D(x) - grado d(x)}}$$

En nuestro ejemplo: 3 = 5 – 2.

5. Regla de Ruffini

La regla de Ruffini es un método cómodo para hacer la división de un polinomio por un binomio x-a.

Lo veremos sobre un ejemplo: dividir $\{3x^5-2x^4+6x^2-10\} : \{x-2\}$

1º. Una vez ordenado decrecientemente el polinomio dividendo, pondremos los coeficientes de sus términos en fila; si falta algún término, su coeficiente será cero. Debajo y a la izquierda colocaremos el término independiente del divisor cambiado de signo.

	3	-2	0	6	0	-10
2						

2º. Bajamos el primer coeficiente y lo multiplicamos por el término independiente del divisor; el producto lo sumamos al siguiente coeficiente; la suma obtenida la multiplicamos de nuevo por el término independiente del divisor y continuamos así.

		3	-2	0	6	0	-10	
	2		6	8	16	44	88	
coef. c (x)		3	4	8	22	44	78	resto

3º El último número obtenido es el resto de la división; los restantes son los coeficientes del cociente; como el grado del divisor es 1,el grado del cociente será de una unidad menos que el del dividendo.

En nuestro ejemplo: cociente $3x^4+4x^3+8x^2+22x+44$. Resto: 78.

Si se trata de dividir un polinomio por el binomio x+a, pondremos en la parte inferior izquierda -a (siempre el término independiente del divisor cambiado de signo).

Ejemplo: dividir: $\{4x^4-3x^2+6x\} : \{x+3\}$

	4	0	-3	6	0
-3		-12	36	-99	279
	4	-12	33	-93	279

cociente: $4x^3-12x^2+33x-93$
resto: 279

6. Teorema del resto

El resto de dividir un polinomio por el binomio x-a es igual al valor numérico de dicho polinomio para x=a.

O bien: el resto de dividir un polinomio por el binomio x+a es igual al valor numérico de dicho polinomio para x=-a.

Veamos dos ejemplos:

1. Al dividir $\{3x^5-2x^4+6x^2-10\} : \{x-2\}$ hemos obtenido de resto 78; según el teorema del resto,el valor numérico del polinomio $3x^5-2x^4+6x^2-10$ para x=2 debe ser 78.

   Comprobémoslo: $3\cdot2^5-2\cdot2^4+6\cdot2^2-10=3\cdot32-2\cdot16+6\cdot4-10=78$.

2. Con el otro ejemplo expuesto, el valor de $4x^4-3x^2+6x$ para x=-3 debe ser 279.

   Veamos: $4\cdot(-3)^4-3\cdot(-3)^2+6\cdot(-3)=279$.

Algunas aplicaciones del teorema del resto

1. El teorema del resto permite calcular el resto de una división entre x-a o entre x+a, sin hacer la división.

   Ejemplo: ¿Cuál es el resto de la división $\{3x^3-6x^2+2x-10\} : \{x-1\}$?

   Basta calcular el valor numérico del polinomio para x=1

   Resto = $3\cdot1^3-6\cdot1^2+2\cdot1-10= -11$

2. Asimismo podemos saber si un polinomio el divisible por x-a o por x+a sin hacer la división; basta que el valor numérico (= el resto) nos dé cero.

   Ejemplo: ¿Es divisible x^2-4x+4 por x-2?

   Veamos: $2^2-4\cdot2+4=4-8+4=0$. Sí.

3. Otras aplicaciones del teorema del resto: cálculo de las soluciones racionales de cualquier ecuación polinómica con coeficientes racionales, factorización de polinomios, cálculo del mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de polinomios, los veremos a continuación.

7. Cálculo de las raíces de un polinomio

Se llaman raíces de un polinomio P(x) a los valores de la variable que hacen que el polinomio tome valor numérico cero. P(x)=0.

Ejemplo: Del polinomio x^3-2x^2-5x+6 son raíces los valores 3, 1, -2, pues

$$(3)^3-2\cdot(3)^2-5\cdot(3)+6=0$$

$$(1)^3-2\cdot(1)^2-5\cdot(1)+6=0$$

$$(-2)^3-2\cdot(-2)^2-5\cdot(-2)+6=0$$

Para obtener dichas raíces se divide el polinomio, por Ruffini, por un número que sea divisor del término independiente. Si el resto es cero, ese número es la raíz. Si el resto es distinto de cero, se prueba con otro divisor del término independiente.

En nuestro ejemplo, los divisores de 6 son +1,-1,+2,-2,+3,-3,+6-6.

x^3-2x^2-5x+6 Al probar con el 1 el resto es cero, por lo cual es raíz del polinomio.

	1	-2	-5	6
1		1	-1	-6
	1	-1	-6	0
-2		-2	6	
	1	-3	0	
3		3		
	1	0		

Después se sigue probando con los divisores en el polinomio cociente y obtenemos de raíz -2, y así sucesivamente hasta que el cociente es de grado 1. El término independiente cambiado de signo es la última raíz. En el ejemplo, el cociente es x-3, la última raíz será 3.

Las raíces de este polinomio son 1,-2,3.

Las raíces pueden repetirse como las del polinomio x^2-2x+1 que son 1,1. Se dice que 1 es raíz doble.

Las raíces no siempre son enteras. El polinomio x^2-3 tiene de raíces $+\sqrt{3},-\sqrt{3}$; para estos casos, si el polinomio es de segundo grado, se resuelve como una ecuación de segundo grado.

También **hay polinomios de segundo grado que no tienen raíces reales**, como x^2+1.

8. Factorización de polinomios

Todo polinomio se puede descomponer en producto de polinomios de primer grado y de segundo grado.

Si las raíces de un polinomio P(x) son a,b,c,..., el polinomio se podrá descomponer en: P(x)=(x-a)(x-b)(x-c)... estos son los factores.

Si alguna raíz es múltiple (doble, triple...) se pondrá el factor elevado a la potencia correspondiente $\{(x-a)^2, (x-a)^3,...\}$

Si algún polinomio de segundo grado no tiene raíces reales, el factor es dicho polinomio.

Ejemplo: el polinomio $x^5+2x^4-3x^3-x^2-2x+3$ tiene raíces 1,1,-3 y queda de cociente x^2+x+1, que no tiene raíces reales. Su descomposición factorial será: $(x-1)^2$ $(x+3)$ (x^2-x+1)

	1	2	-3	-1	-2	3
1		1	3	0	-1	-3
	1	3	0	-1	-3	0
1		1	4	4	3	
	1	4	4	3	0	
-3		-3	-3	-3		
	1	1	1	0		

9. Fracciones algebráicas

Una fracción algebráica es el cociente entre dos polinomios $\frac{P(x)}{Q(x)}$ Ej : $\frac{3x+5}{x^2+3}$

Dos fracciones algebráicas son equivalentes si al multiplicarlas en cruz nos da el mismo polinomio.

Ejemplo: $\frac{1}{3x+5}$ y $\frac{x}{3x^2+5x}$ son equivalentes porque 1 $(3x^2+5x)=x\,(3x+5)$.

Si se multiplican numerador y denominador por un mismo polinomio, la fracción resultante es equivalente a la primera.

Si descomponemos factorialmente numerador y denominador, y hay factores iguales en ambos, estos factores se pueden simplicar.

Ejemplo: $\frac{3x^2+5x}{3x+5}=\frac{x(3x+5)}{3x+5}=\frac{x}{1}=x$

Mínimo común múltiplo de polinomios es el polinomio formado por los factores comunes y no comunes con el mayor exponente.

Ejemplo: $\left.\begin{array}{l} x^2-4x+3=(x-1)(x-3) \\ x^2-2x+1=(x-1)^2 \end{array}\right\}$

m.c.m. $(x^2-4x+3,\ x^2-2x+1)=(x-1)^2\,(x-3)$

Máximo común divisor de polinomios es el polinomio formado por los factores comunes con el menor exponente.

Ejemplo: M.C.D. $(x^2-4x+3,\ x^2-2x+1)=x-1$

Suma y resta de fracciones algebráicas.

1º Se halla el común denominador (m.c.m. de los denominadores).

2º Se divide el común denominador por cada denominador y se multiplica por el numerador corres-pondiente.

3º Se suman o restan los numeradores resultantes.

Ejemplo:

$$\frac{3x}{x^2-4x+3}+\frac{x+2}{x^2-2x+1}=\frac{3x}{(x-1)(x-3)}+\frac{x+2}{(x-1)^2}=\frac{3x(x-1)}{(x-1)^2(x-3)}+\frac{(x+2)(x-3)}{(x-1)^2(x-3)}=\frac{3x^2-3x+x^2-x-6}{(x-1)^2(x-3)}=\frac{4x^2-4x-6}{(x-1)^2(x-3)}$$

Producto de fracciones algebráicas

El numerador es el producto de los numeradores y el denominador el producto de los denominadores.

Ejemplo: $\frac{3x}{x^2 - 4x + 3} \cdot \frac{x+2}{x^2 - 2x + 1} = \frac{3x}{(x-1)(x-3)} \cdot \frac{x+2}{(x-1)^2} = \frac{3x(x+2)}{(x-1)^3(x-3)}$

Cociente de fracciones algebráicas

Se multiplica en cruz igual que el cociente de fracciones numéricas.

Ejemplo: $\frac{3x}{x-1} : \frac{x+2}{x+1} = \frac{3x(x+1)}{(x-1)(x+2)}$

10. EXPRESIONES NOTABLES

Damos a continuación algunas identidades algebraicas de uso común y que es preciso conocer:

El cuadrado de un binomio suma es igual a la suma de los cuadrados de los términos que lo forman más el doble del primer término por el segundo.

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2\cdot a\cdot b}$$

El cuadrado de un binomio diferencia es igual a la suma de los cuadrados de los términos que lo forman menos el doble del primer término por el segundo.

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b}$$

El producto de una suma de dos términos por su diferencia es igual a la diferencia de sus cuadrados.

$$\boxed{(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2}$$

El cubo de un binomio suma (ó diferencia) es igual al cubo del primer término más (menos) el triplo del cuadrado del primer término por el segundo más el triplo del primer término por el cuadrado del segundo, más (menos) el cubo del segundo término.

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3\cdot a^2\cdot b + 3\cdot a\cdot b^2 + b^3}$$

$$\boxed{(a-b)^3 = a^3 - 3\cdot a^2\cdot b + 3\cdot a\cdot b^2 - b^3}$$

El cuadrado de un polinomio es igual a la suma de los cuadrados de todos sus términos más los dobles productos de cada término por todos los posteriores.

$$\boxed{(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\cdot a\cdot b + 2\cdot a\cdot c + 2\cdot a\cdot d + 2\cdot b\cdot c + 2\cdot b\cdot d + 2\cdot c\cdot d}$$

EJERCICIOS DE POLINOMIOS

1. Clasificar las siguientes expresiones algebraicas:

a) $\dfrac{3+a^2}{b}$ b) $\dfrac{x^3+3y^2}{15}$ c) $\sqrt{a^2 \cdot b}$

2. Hallar el valor numérico de:

a) $3a^3b - c$ para $a = 5$, $b = -2$, $c = 3$.

b) $3a^2b^2 - 4a^3b + 5a^2b$ para $a = -1$, $b = -2$.

3. Indicar el coeficiente y la parte literal de los monomios:

a) $-\dfrac{3}{7}x^4y^7z$ b) $\dfrac{3}{2}a^3b^2$ c) $\dfrac{4a^5b^2}{7}$

4. De entre los monomios que se dan indicar los que son semejantes:

a) $\dfrac{1}{3}a^2b$ b) $6ab^2$ c) $-4a^2b$ d) $\sqrt{3}\,a^2b$

5. Ordenar los siguientes polinomios con respecto a *x*, e indicar su grado total y el grado respecto a cada incógnita:

a) $3xy^2 + 5x^3y - 6x^2y^3 + 7$.

b) $4xyz^3 + 6x^5y^2z^4 - 5x^7y^4z$.

6. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $6a + 8a$ b) $2a - b + 5a - 3b + 7a$ c) $2a + 4a - 7a$

d) $4a - 6a$ e) $x + 2x + 3x$ f) $x - 2x - 3x$

7. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $(a+b)\cdot(a+b)$ b) $(a-b)\cdot(a-b)$

c) $(a+b)\cdot(a-b)$ d) $4ab \cdot 2a$

e) $(-4)\cdot(12a^2b)$ f) $(a-4b)^2$

g) $(-3a^2)\cdot(5ab^2)$ h) $(5ab^2)^2$

i) $(3a - b) \cdot (3a + b)$ j) $(-12ab) \cdot (-8ab^2)$

8. Realiza las siguientes operaciones:

a) $x^2 + 3x^2 + 7x^2$ b) $x^4 \cdot x^2 \cdot x \cdot x^3$ c) $2x \cdot 3x^4 + 7x^2 \cdot x^3$

9. Divide los siguientes monomios:

a) $\dfrac{6x^5}{2x^4}$ b) $\dfrac{\frac{3}{2}x^3}{\frac{4}{3}x}$ c) $\dfrac{\frac{1}{3}x^7}{-\frac{1}{5}x^3}$

10. Reducir y ordenar en orden decreciente los siguientes polinomios:

a) $5x^2 - 3x^2 + \frac{3}{4}x^3 + \frac{1}{2} + 6x - x^3 + 3x^2$.

b) $3y - 2y^3 + \frac{4}{3}y + y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{3}y$.

11. Calcula los siguientes productos de polinomios:

a) $(3x^2 - 5x + 8) \cdot 2x$ b) $\left(5x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{4}{3}\right) \cdot (6x + 12)$

c) $\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{5}x + 4\right) \cdot (10x + 5)$. d) $\left(x^2 - 8x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(2x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right)$

12. Halla el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

a) $\left(\frac{3}{2}x^5 + 4x^3 - 8x + 1\right) : 3x^2$ b) $(x^2 + 2x + 1) : x$

c) $(x^3 + 3x^2 + 6x + 2) : x^2$ d) $(6x^8 + 4x^6 + 5x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 2x - 1) : 4x^3$

13. Realiza las siguientes divisiones y di cuáles son exactas:

a) $(x^3 - 3x^2 + 6x - 4) : (x - 1)$ b) $(2x^2 + 4x - 5) : (x^2 + 6)$

c) $(3x^5 + 4x^4 + 8x^3 - 7x + 6) : (3x^3 + x^2 - 1)$

14. Aplicando la regla de Ruffini, halla el resto y el cociente de las siguientes divisiones:

a) $(x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 1) : (x - 8)$ b) $(2x^4 + 3x^2 + 6x - 7) : (x + 1)$

c) $\left(x^3+5x^2+x-1\right):\left(x-2\right)$ d) $\left(\frac{1}{4}x^5+\frac{2}{3}x^3-x^2+x-6\right):\left(x+\frac{1}{3}\right)$

15. Halla, sin hacer la división, el resto de las siguientes divisiones:

a) $\left(3x^3-6x^2+5x-8\right):\left(x+2\right)$ b) $\left(\frac{1}{4}x^3-2x+1\right):\left(x-1\right)$

16. Halla *a* en el polinomio $x^4+5x^3-2x+2a$ sabiendo que al dividirlo por $x-3$ da de resto 122.

17. Calcular, mediante la división por Ruffini el valor numérico del polinomio x^3-6x+4 para *x=5*.

18. Averiguar qué valor debe darse a *m* para que el polinomio x^3+2x-m sea divisible por $x-3$.

19. Aplicando las fórmulas de expresiones notables dadas en el tema, calcula:

a) $\left(3x+5x^2\right)^2$ b) $\left(2x-4x^2\right)^2$ c) $\left(6x+2\right)\cdot\left(6x-2\right)$

d) $\left(\frac{1}{2}+3x^3\right)^2$ e) $\left(3+2x+3x^2\right)^2$ f) $\left(3x+2x^2\right)^3$

g) $\left(3x-2x^2+5x^3\right)^2$ h) $\left(3-2x\right)^3$ i) $\left(3x-2x^3\right)\cdot\left(3x+2x^3\right)$

20. Descompón las diferencias de cuadrados siguientes en producto de una suma por una diferencia:

a) $9x^2-16$ b) $36a^2-1$ c) $\frac{9}{16}x^4-\frac{25}{9}y^2$

21. Hallar el dividendo de una división en la que el divisor, cociente y resto son, respectivamente: *a+1*, *a-1*, *a-1*. Determinar para qué valores de *a* el dividendo será nulo.

22. Descomponer en factores por el método oportuno:

1) $-x+x^2-x^3+x^4$ 2) $9x^2-3x$

3) $2ax^2-4a^2x+12ax$ 4) x^2-9

5) x^3-2x+4 6) $16y^2-x^4$

7) $x^2-5x-14$ 8) x^3-2x^2-x+2

9) $6x^2y-3xy^3$ 10) $ac-bc+ad-bd$

11) $a^4-x^2y^2$ 12) $x^4+5x^3+5x^2-5x-6$

13) $8x^3+2x^2-13x+3$

14) $12x^3+8x^2-3x-2$

15) $a^2-ab+ax-bx$

16) z^4-y^4

17) $\frac{a^2}{9}-\frac{b^2}{25}$

18) x^4-5x^2+4

19) x^3-2x^2+3x-6

20) $ax+by-ay-bx$

21) x^3-y^3

22) x^3+y^3

23) a^2+y^2-2ay

23. Simplificar las siguientes fracciones algebraicas:

1) $\frac{4ax^2}{12a^2xy}$

2) $\frac{-3m^5n}{-6m^4n^3z}$

3) $\frac{49(a^2b)^3}{35a^{10}b}$

4) $\frac{16a^3b-12a^2b^3}{8a^3b}$

5) $\frac{21axy^3-49x^2y}{63(xy^2)^3}$

6) $\frac{xy^2-x}{x^2-ax}$

7) $\frac{mx-my}{ay-ax}$

8) $\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}$

9) $\frac{x^4-y^4}{(x+y)^2(x-y)^2}$

10) $\frac{3ax-3ay}{9y^2-9x^2}$

11) $\frac{4xy+4x}{2xy+2x-4yz-4z}$

12) $\frac{a^2-b^2-ac+bc}{b^2-c^2+ab+ac}$

13) $\frac{x^3-y^3}{ax-ay+bx-by}$

14) $\frac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-6x^2+2x+12}$

15) $\frac{x^2-1}{x^3-x-3x^2+3}$

16) $\frac{x^4+x^2}{x^4-1}$

24. Hallar el m.c.d. y el m.c.m. de los polinomios siguientes:

a) x^3-7x-6 y $x^3+4x^2-11x-30$

b) x^4+8x^2+15 y x^2+3

c) $2x^3-2x^2-2x-4$ y $2x^2+x-10$

25. Realizar las siguientes operaciones con fracciones algebraicas:

1) $\dfrac{x}{x^2-3x+2}+\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{x-1}$

2) $\dfrac{x-2}{x^2-x-6}+\dfrac{x+1}{x^2-4x+3}$

3) $\dfrac{x+1}{x+3}-\dfrac{x-2}{x-1}$

4) $\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}-\dfrac{1}{x-1}$

5) $\dfrac{3-x}{6}+\dfrac{5-y}{20}+\dfrac{x-y}{15}-\dfrac{x-3}{10}$

6) $\dfrac{a}{3b}-\dfrac{a^2-1}{b^2}+\dfrac{a^2+b}{ab}-\dfrac{b^2}{a^2}$

7) $\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{2-a}{b-a}-\dfrac{b^2}{a^2-b^2}$

8) $\dfrac{x-y}{x+y}-\dfrac{3x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}$

9) $\dfrac{3(x-1)}{x^2-y^2}-\dfrac{x+y}{y-x}+\dfrac{x^2+y^2}{x^2-2xy+y^2}$

10) $\dfrac{3a}{3ab-2b^2}+\dfrac{3a+2b}{12ab}-\dfrac{4b}{9a^2-6ab}$

26. Productos de fracciones algebraicas:

a) $4xy\left(\dfrac{3}{y}-\dfrac{3x^2}{2}\right)$

b) $\left(1+\dfrac{y}{x}\right)\cdot\left(\dfrac{x^2-xy}{2y^2}\right)$

c) $\dfrac{x^2-y^2}{x-y}\cdot\dfrac{x+y}{x^2+2xy+y^2}$

d) $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-5x}\cdot\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$

e) $\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2x}{1-x^2}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{x}-1\right)$

f) $\dfrac{x^3+y^3}{x^2-y^2}+\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$

g) $\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right)\cdot\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)\cdot\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

h) $\dfrac{ax}{a^2-x^2}\cdot\left(\dfrac{x^2+a^2}{2ax}+1\right)\cdot\dfrac{2x}{x+a}$

27. Cocientes de fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x^3+3x}{x^2-3x+2}\div\dfrac{x^3-x^2+3x-3}{x^2-4}$

b) $\dfrac{(a-1)^2}{x^2-1}\div\dfrac{a^2-1}{(x-1)^2}$

c) $\dfrac{3a+3}{12-12a}\div\dfrac{(a+1)^2}{a^2-1}$

d) $\left(1+\dfrac{a}{b}\right)\div\dfrac{a^2-b^2}{ab-b^2}$

e) $\left(1-\dfrac{3}{x}-\dfrac{11}{x^2}-\dfrac{5}{x^3}\right)\div\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)$

f) $\left[\left(\dfrac{x}{y}-y\right)\cdot\left(\dfrac{x}{y}+y\right)\right]\div\left(\dfrac{x}{x^2-y^4}-\dfrac{1}{x-y^2}\right)$

g) $$\frac{\dfrac{x-a}{x+a}-\dfrac{x^2+a^2}{x^2-a^2}}{-1+\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^2}\div\frac{x+a}{x-a}$$

h) $$\frac{1-\dfrac{x}{y}}{1+\dfrac{x}{y}}\div\frac{1+\dfrac{y}{x}}{1-\dfrac{y}{x}}$$

i) $$\frac{1+\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{a^2}}{a+3+\dfrac{2}{a}}:\frac{a-\dfrac{1}{a}}{1-\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{a^2}}$$

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS

1. a) Fraccionaria y racional.

   b) Entera y racional.

   c) Entera e irracional.

2. a) –753 b) -6

3. a) Coeficiente = $-\frac{3}{7}$ b) Coeficiente = $\frac{3}{2}$ c) Coeficiente = $\frac{4}{7}$

   Parte literal = x^4y^7z Parte literal = $a^3 \cdot b^2$ Parte literal = $a^5 \cdot b^2$

4. Son semejantes los monomios 1, 3, y 4.

5.

$5x^3y - 6x^2y^3 + 3xy^2 + 7$	
Grado total	5
Grado x	3
Grado y	3

$-5x^7y^4z + 6x^5y^2z^4 + 4xyz^3$	
Grado total	12
Grado x	7
Grado y	4
Grado z	4

6. a) $14a$ b) $14a - 4b$ c) $-a$

   d) $-2a$ e) $6x$ f) $-4x$

7. a) $a^2 + 2ab + b^2$ b) $a^2 - 2ab + b^2$ c) $a^2 - b^2$

   d) $8a^2b$ e) $-48a^2b$ f) $a^2 - 8ab + 16b^2$

   g) $-15a^3b^2$ h) $25a^2b^4$ i) $9a^2 - b^2$

   j) $96a^2b^3$

8. a) $11x^2$ b) x^{10} c) $13x^5$

9. a) $3x$ b) $\frac{9}{8}x^2$ c) $-\frac{5}{3}x^4$

10. a) $-\frac{1}{4}x^3 + 5x^2 + 6x + \frac{1}{2}$ b) $-\frac{5}{3}y^3 + y^2 + 4y$

11. a) $6x^3 - 10x^2 + 16x$ b) $30x^3 + 57x^2 + 2x + 16$

c) $15x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 39x + 20$ d) $2x^4 - \frac{65}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{31}{8}x - \frac{1}{4}$

12. a) C: $\frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}x$ R: $-8x + 1$ b) C: $x + 2$ R: 1

c) C: $x + 3$ R: $6x + 2$ d) C: $\frac{3}{2}x^5 + x^3 + \frac{5}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$ R: $-2x - 1$

13. a) C: $x^2 - 2x + 4$ R: 0 $\rightarrow$ Exacta. b) C: 2 R: $4x - 17$

c) C: $x^2 + x + \frac{7}{3}$ R: $-\frac{4}{3}x^2 - 6x + \frac{25}{3}$

14. a) C: $x^4 + 5x^3 + 42x^2 + 337x + 2695$ R: 21559 b) C: $2x^3 - 2x^2 + 5x + 1$ R: -8

c) C: $x^2 + 7x + 15$ R: 29 d) C: $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{25}{36}x^2 - \frac{133}{108}x + \frac{457}{324}$ R: $-\frac{6298}{972}$

15. a) -66 b) $-\frac{3}{4}$

16. a = -125

17. P(5) = 99

18. m = 33

19. a) $9x^2 + 30x^3 + 25x^4$ b) $4x^2 - 16x^3 + 16x^4$

c) $36x^2 - 4$ d) $\frac{1}{4} + 3x^3 + 9x^6$

e) $9x^4 + 12x^3 + 22x^2 + 12x + 9$ f) $8x^6 + 36x^5 + 54x^4 + 27x^3$

g) $25x^6 - 20x^5 + 34x^4 - 12x^3 + 9x^2$ h) $-8x^3 + 36x^2 - 54x + 27$

i) $9x^2 - 4x^6$

20. a) $(3x + 4)\cdot(3x - 4)$ b) $(6a + 1)\cdot(6a - 1)$ c) $\left(\frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{3}y\right)\cdot\left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{3}y\right)$

21. D: $a^2 + a - 2$; $a = 1$ y $a = -2$

22:

1) $x(x-1)(x^2+1)$ 2) $3x(3x-1)$

3) $2ax(x-2a+6)$ 4) $(x-3)(x+3)$

5) $(x+2)(x^2-2x+2)$ 6) $(4y-x^2)(4y+x^2)$

7) $(x+2)(x-7)$ 8) $(x-2)(x-1)(x+1)$

9) $3xy(2x-y^2)$ 10) $(a-b)(c+d)$

11) $(a^2-xy)(a^2+xy)$ 12) $(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)$

13) $8(x-1)\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)$ 14) $12\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)$

15) $(a-b)(a+x)$ 16) $(z-y)(z+y)(z^2+y^2)$

17) $\left(\frac{a}{3}-\frac{b}{5}\right)\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{5}\right)$ 18) $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$

19) $(x-2)(x^2+3)$ 20) $(b-a)(y-x)$

21) $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ 22) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$

23) $(a-y)^2$

23:

1) $\frac{x}{3ay}$ 2) $\frac{m}{2n^2z}$ 3) $\frac{7b^2}{5a^4}$

4) $\frac{4a-3b^2}{2a}$ 5) $\frac{3ay^2-7x}{9x^2y^5}$ 6) $\frac{y^2-1}{x-a}$

7) $-\frac{m}{a}$ 8) $\frac{a-b}{a+b}$ 9) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

10) $-\frac{a}{3x+3y}$ 11) $\frac{2x}{x-2z}$ 12) $\frac{a-b}{b+c}$

13) $\frac{x^2+xy+y^2}{a+b}$ 14) $\frac{x^2+x-6}{x^2-4x-6}$ 15) $\frac{1}{x-3}$

16) $\frac{x^2}{x^2-1}$

24: a) m.c.m. $(x+2)(x-3)(x+1)(x+5)$ m.c.d. $(x+2)(x-3)$

b) m.c.m. $(x^2+3)(x^4+8x^2+1)$ m.c.d. 1

c) m.c.m. $2(x-2)\left(x-\frac{5}{2}\right)(x^2+x+1)$ m.c.d. $2(x-2)$

25: 1) $\frac{6x-8}{x^2-3x+2}$ 2) $\frac{2x^2+4}{x^3-2x^2-5x+6}$

3) $\frac{-x+5}{x^2+2x-3}$ 4) $\frac{1}{x+2}$

5) $\frac{33-20x+7y}{60}$ 6) $\frac{-3a^4+4a^3b+3a^2+3ab^2-3b^4}{3a^2b^2}$

7) $\frac{2a^2+3ab-2a-2b}{a^2-b^2}$ 8) $\frac{-2x^2}{(x+y)^2}$

9) $\frac{2x^3+2x^2y+3x^2-3xy-3x+3y}{(x-y)^2\cdot(x+y)}$ 10) $\frac{45a^2-20b^2}{12ab(3a-2b)}$

26: a) $6x(2-x^2y)$ b) $\frac{x^2-y^2}{2y^2}$ c) 1

d) $\frac{x-1}{x}$ e) $\frac{1}{x}$ f) $x-y$

g) $\frac{x^2-y^2}{xy}$ h) $\frac{x}{a-x}$

27: a) $\frac{x(x+2)}{(x-1)^2}$ b) $\frac{(a-1)(x-1)}{(x+1)(a+1)}$ c) $-\frac{1}{4}$

d) 1 e) $\frac{x^3-3x^2-11x-5}{x^2-x-1}$ f) $-\left(\frac{x^2-y^4}{y^2}\right)^2$

g) $\frac{1}{2}$ h) $-\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2$ i) $\frac{a-1}{a^2(a+2)}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

POLINOMIOS

1. Reduce términos semejantes:

a) $\frac{3}{4}a^2b^3c - \frac{2}{3}a^3b^2c + \frac{5}{6}b^3a^2c$

b) $\frac{1}{3} - 3xy^2 + \frac{2}{3}x^2y - \frac{3}{4}y^2x + 3$

c) $4a^3b^4 - \frac{3}{4}a^4b^3 + \frac{2}{3}a^3b^4 - b^3a^4 + b^4a^3$

2. Efectúa las siguientes operaciones de sumas y restas:

a) $\left(3a^2b - 2ab + ab - 1\right) + \left(5ab^2 - 2a^2b - 1 + ab\right) + \left(3 - 4ab + a^2b - 2ab^2\right)$

b) $\left(1 - xy - y^2 - z^2\right) + \left(3xy + 2y^2\right) + \left(-3z^2 - 5 + xy\right) + \left(3xy - x^2 - z^2\right)$

c) $\left(27a^2b - 3a^2b - 7a^3b^2\right) + \left(6a^2b + 8a^3b^2 - 7a^3b\right) + \left(-3a^3b + 10a^3b^2 - a^2b\right)$

d) $\left[2a^3 + 3(x-y) - 5(a^2 + b)\right] + \left[(-a^3 + 2(a^2 + b) - 8(x-y)\right] + \left[(12(x-y) + 10(a^2 + b) - 6a^3\right]$

e) $\left[2(c+d) - 3(x^2 - y) - 2(y^2 + z^2)\right] + \left[5(x^2 - y) - 5(c+d) + 6(y^2 + z^2)\right] + \left[5(y^2 + z^2) - 4(c+d) + 5(x^2 - y)\right] + \left[7(c+d) - (y^2 + z^2) + 2(x^2 - y)\right]$

3. Calcula A-B+C y A+B-C, siendo:

$$A = \frac{1}{3}x^2y - \frac{3}{2}xy^2 + 3xy; B = \frac{5}{6}x^2y - \frac{1}{3}xy + \frac{7}{5}xy; C = \frac{3}{4}xy^2 + \frac{3}{4}x^2y - \frac{5}{6}xy$$

4. Efectúa los siguientes productos:

a) $(2a^2 - 3ab + b^2)(a^2 - 5ab + 6b^2)$

b) $(2a^2 - 3b^2 + 5c^2)(a^2 - 4b^2 + 6c^2)$

c) x(y-z)(y+z)+y(z+x)(z-x)+2(x+y)(x-y)

d) $\{a[b(a-c)+a(a+c)]-c[(a+b)c-(ac-b)]\}.(a^2-bc)$

e) $\left(\frac{3}{4}x^3-\frac{2}{3}x^2+x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{3}{2}x-5\right)\cdot\left(x^2+\frac{4}{9}\right)$

f) $\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{2}{3}\right)(x+1)-\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)\right]-3x^2$

g) $\left(\frac{1}{5}x^3-\frac{3}{2}x^2\right)2x-\left(\frac{3}{4}x+\frac{5}{6}\right)(-4x^3)$

5. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\left(x^3-\frac{1}{3}x\right)\left(x^2+\frac{1}{2}x\right)-\left(3x-\frac{3}{4}\right)\left(x^4-\frac{2}{5}x^3\right)$

b) $(2ab^2-6a^2b-b^3-5a^3)(8ab^2-3b^3+3a^2b)$

c) $\frac{3-x}{2}-\frac{2x-3}{6}\cdot\frac{x-2}{4}+\frac{3x-2}{3}$

6. Emplea las reglas de los productos notables para calcular las siguientes expresiones:

a) $(2a+b)^2$; $(a+b^2)^2$; $(x^2-y)^2$.

b) $\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2$; $\left(\frac{3}{2}x-y\right)^2$; $\left(2x+\frac{1}{4}y\right)^2$.

c) $\left(\frac{2}{3}x-\frac{9}{5}\right)^2$; $\left(\frac{3}{2}m+\frac{7}{9}\right)^2$; $\left(2x+\frac{1}{4}y\right)^2$.

d) $(3am+m)^2$; $\left(\frac{2}{3}a^2-b^2\right)^2$; $(m^2n+nm^2)^2$.

7. Utiliza las reglas de los productos notables para calcular las expresiones siguientes:

a) $(3-a)(3+a)$

b) $\left(\frac{2}{3}-b\right)\left(\frac{2}{3}+b\right)$

c) $(a-b^2)(a+b^2)$

d) $(a^3+b^2)(a^3-b^2)$

e) $\left(\frac{3}{2}a^2-1\right)\left(\frac{3}{2}a^2+1\right)$

f) $\left(\frac{2}{5}x^2+\frac{3}{4}y^2\right)\left(\frac{2}{5}x^2-\frac{3}{4}y^2\right)$

8. Calcula los cuadrados de los trinomios siguientes:

a) $(x+y+z)^2$ b) $(2x+y+3z)^2$

c) $(a-b+c)^2$ d) $(a+b-c)^2$

e) $(3a-2b-c)^2$ f) $(a^2-ab+b^2)^2$

9. Halla el cubo de los binomios siguientes:

a) $(a+2b)^3$ b) $\left(\frac{1}{3}x+2y\right)^3$

c) $(3-2x)^3$ d) $(5x^2-3y)^3$

REGLA DE RUFFINI Y FRACCIONES ALGEBRAICAS

1. Sirviéndote de la regla de Ruffini halla el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

a) $(x^3-x^2+11x-10) : (x-2)$ b) $(8x^3-3x+x^4+20+12x^2) : (x+3)$

c) $(6x^4+20x^3-41x^2+50x+20) : (x+5)$ d) $(20-22x^3+5x^5) : (x-2)$

e) $\left(\frac{1}{6}x^6+\frac{2}{3}x^5-3x^4-\frac{5}{6}x^3+\frac{2}{3}x+4\right):(x-2)$ f) $\left(7x^2+\frac{2}{3}x^5-3x^4-\frac{5}{6}x^3+\frac{2}{3}x+4\right):(x+3)$

g) $\left(m+\frac{3}{2}m^4+2m^5-\frac{13}{4}m^3\right):\left(m-\frac{1}{2}\right)$ h) $(3x^3a-5xa^3+2x^2a^2-x^4+a^4) : (x-2a)$

i) $(a^6-b^6) : (a+b)$ j) $(a^5-3a^3b^2+b^5) : (a-b)$

k) $(x^4-2x^2+3) : (x^{32}-1)$ l) $(x^{12}-3x^9a^3+5x^6a^6+3x^3a^9-7a^{12}) : (x^3-a^3)$

2. Averigua el resto de las siguientes divisiones. Si son exactas calcula también el cociente y pon el dividendo como producto de dos factores:

a) $3x^4+5x^3-x-8 : x+2$ b) $5m-3m^3+8m^2-6 : m-3$

c) $4a^4-8a^2-6+2a^3-2a : a-\frac{3}{2}$ d) $\frac{2}{3}m^2+4+\frac{11}{9}m+\frac{3}{2}m^3 : m+\frac{4}{3}$

3. Halla p para que sea exacta la división:

x^2-2x+p : x+3

4. Busca r para que sea nulo el resto de la división:

$$x^3 - \frac{2}{3}x^2 + rx + \frac{7}{9} : x + \frac{1}{3}$$

5. Añade el término independiente al polinomio x^4-3x^3+x para que sea divisible por x-2.

6. Halla el valor que debemos dar a "p" para que el polinomio

$3a^5y^2-2a^7+6a^4y^3-py^4+y^7-a^2y^5$ sea divisible por y-a.

7. ¿Qué valor ha de tomar m para que x^5-8x^2+mx-6x^3+1 sea divisible por x-4?

8. ¿Qué valor ha de tener b para que x-3 sea un factor de x^3-6x^2+2x-2b+2?

9. En el polinomio x^4-3x^3+2x-2m, determinar m para que al dividirlo por x+2 dé 16 de resto.

10. En el polinomio: $2x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{5}{6}x + 3x$

¿Qué valor ha de tener m para que $x - \frac{1}{2}$ sea un factor?

11. Halla el valor de r para que (-2) sea un cero del polinomio x^2-3x^3+2rx-4.

12. Descompón en factores, realizando una doble extracción:

1) ac-bc+ad-bd

2) a^2-ab+ax-bx

3) ay-2by-2bx+ax

4) 6ab-9b^2+2ax-3bx

13. Descompón en factores los siguientes polinomios:

a) x^3-7x^2+7x+15

b) x^3-2x^2-x+2

c) $2x^3 + 3x^2 - \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$

d) x^4+x^3-16x^2-4x+48

e) 3x^2-12x-15

f) 5x^2+5x-30

g) 45a^2y^4-125x^2

h) x^5-16x

14. Halla el m.c.d. y el m.c.m. de los siguientes grupos de polinomios:

a) $a-1$	a^2-a	$ab-b$
b) a^2-b^2	a^2-2a+b^2	a^2-ab
c) x^3-1	x^2-x	x^2-1
d) $5x-10$	$15x^2-60$	$3x^2-12x+12$
e) $ax-ay-bx+by$	$x^2-2xy+y^2$	$3a^2-6ab+3b^2$
f) x^4-y^4	x^2-y^2	$x^3-x^2y+xy^2-y^3$
g) $15a-5a^2$	a^2-6a+9	$9-a^2$

15. Efectúa las siguientes operaciones:

1) $\dfrac{3(x-1)}{x^2-y^2}-\dfrac{x+y}{y-x}+\dfrac{x^2+y^2}{x^2-2xy+y^2}$

2) $\dfrac{y^2-x^2}{x^2+xy}\cdot\dfrac{3x}{x-y}$

3) $\dfrac{3(x-y)}{2xy-x^2-y^2}-\dfrac{x}{x^2-y^2}-\dfrac{1}{x-y}$

4) $\dfrac{x^3-y^3}{x^2-y^2}\cdot\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$

5) $\dfrac{x}{x^2-y^2}+\dfrac{1}{(x-y)^2}-\dfrac{1}{(x+y)^2}-\dfrac{4xy}{(x^2-y^2)^2}$

6) $\dfrac{(a-1)^2}{x^2-1}:\dfrac{a^2-1}{(x-1)^2}$

7) $\dfrac{1-\frac{x}{y}}{1+\frac{x}{y}}\cdot\dfrac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$

8) $\dfrac{1+\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}}{a+3+\frac{2}{a}}\cdot\dfrac{a-\frac{1}{a}}{1-\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}}$

9) $\dfrac{\frac{x-y}{x+y}-\frac{x+y}{x-y}}{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}:\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right)$

10) $\dfrac{x}{x^3-3x+2}+\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{x-1}$

11) $\dfrac{x-2}{x^2-x-6}+\dfrac{x+1}{x^2-4x+3}$

12) $\dfrac{x+1}{x+3}-\dfrac{x-2}{x-1}$

13) $\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}-\dfrac{1}{x-1}$

14) $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-5x}\cdot\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$

15) $\left(\dfrac{ax}{a^2-x^2}\right)\cdot\left(\dfrac{x^2+a^2}{2ax}+1\right)\cdot\left(\dfrac{2x}{x+a}\right)$